

Methodiek voor de evaluatie en optimalisatie van routine waterkwaliteits- meetnetten

Deel II: overzicht van technieken en methoden



98

16



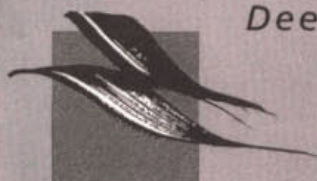
Landbouwwuniversiteit **Wageningen**

stowa

Stichting Toegepast Onderzoek Waterbeheer

Methodiek voor de evaluatie en optimalisatie van routine waterkwaliteitsmeetnetten

Deel II: overzicht van technieken en methoden



ICWS

98

16

Redactie

Ing. L.G. de Vree

Ir. M.W. Blind

Arthur van Schendelstraat 816

Postbus 8090, 3503 RB Utrecht

Telefoon 030 232 11 99

Fax 030 232 17 66

Publicaties en het publicatie-overzicht van de STOWA kunt u uitsluitend bestellen bij:

Hageman Verpakkers BV

Postbus 281

2700 AC Zoetermeer

o.v.v. ISBN- of bestelnummer en een duidelijk afleveradres.

ISBN 90.5773.028.6

INHOUDSOPGAVE

TEN GELEIDE

1 INLEIDING	1
1.1 ONDERZOEKSKADER	1
1.2 PROJECTDOELSTELLINGEN	2
1.3 OPBOUW TOTALE RAPPORTAGE	3
1.4 LEESWIJZER DEEL 2	4
2 BASIS	7
2.1 STATISTISCHE VERDELINGEN	7
2.2 STATISTISCHE TOETSEN EN HYPOTHESEN	9
2.3 DE KEUZE VAN HET (ON)BETROUWBAARHEIDSNIVEAU	10
2.4 VERDELINGSVRIJE VERSUS PARAMETRISCHE METHODEN	11
2.5 TRANSFORMATIES	11
3 ALGEMENE STATISTISCHE BEWERKINGEN	13
3.1 (SEIZOENSGEWOGEN) GEMIDDELDE	13
3.2 (SEIZOENSGEWOGEN) MEDIAAN	14
3.3 VARIANTIE	15
3.4 STANDAARDDEVIATIE	16
3.5 COVARIANTIE	16
3.6 DETECTIELIMIETEN	16
3.6.1 ALGEMEEN	16
3.6.2 VERSCHILLENDE DETECTIELIMIETEN IN EEN MEETREEKS	17
3.7 UITBIJTERS	18
3.7.1 ALGEMEEN	18
3.7.2 ROSNER'S TOETS	19
3.8 NIET-EQUIDISTANTE TIJDREEKSEN EN ONTBREKENDE GEGEVENS	22
3.9 SIGNUMFUNCTIE	22
3.10 RANGORDES TOEKENNEN ('RANKEN')	23
3.11 VERWIJDEREN SEIZOENSINVLOED	23
3.11.1 INLEIDING	23
3.11.2 REKENVOORBEELD (CASE)	24
3.12 VERWIJDEREN TREND	25
3.13 RESIDUEN	26

4 ALGEMENE ANALYSES 27

4.1 ANALYSES PERIODICITEIT (SEIZOENSINVLOED).....	27
4.1.1 KRUSKAL-WALLIS TOETS	28
4.1.2 ÉÉN-FACTOR ANOVA	31
4.2 ANALYSES NORMALITEIT	33
4.2.1 TOETS VAN LILLIEFORS.....	34
4.2.2 SHAPIRO-WILK TOETS	38
4.2.3 SKEW	39
4.2.4 KURTOSIS	41
4.3 ANALYSES HOMOGENITEIT VAN VARIANTIE	43
4.3.1 F-TOETS OP VERSCHIL IN VARIANTIES	43
4.4 ANALYSES AFHANKELIJKHEID WAARNEMINGEN	45
4.4.1 RUNS TOETS VAN WALD-WOLFOWITZ	46
4.4.2 BEREKENING VAN DE AUTOCORRELATIECOËFFICIËNTEN	48
4.4.3 BEREKENEN VAN HOGERE LAG(K)-AUTOCORRELATIE COËFFICIËNTEN UIT DE LAG(1)-AUTOCORRELATIECOËFFICIËNT	50
4.4.4 EFFECTIEVE AANTAL METINGEN EN AUTOCORRELATIE.....	51

5 ANALYSE VAN ACTUELE WATERKWALITEIT EN

NORMTOETSING 53

5.1 BETROUWBAARHEIDSINTERVAL GEMIDDELDE	53
5.2 BETROUWBAARHEIDSINTERVAL MEDIAAN.....	54
5.3 BETROUWBAARHEIDSINTERVAL VARIANTIE	55

6 ANALYSE VAN AUTONOME MONOTONE

ONTWIKKELINGEN IN DE WATERKWALITEIT: TREND 57

6.1 BEREKENING TREND MET BEHULP VAN HET KLEINSTE KWADRATEN CRITERIUM.....	59
6.2 SEN NONPARAMETRIC ESTIMATOR OF SLOPE	61
6.3 SEASONAL KENDALL SLOPE ESTIMATOR.....	65
6.4 TOETS VOOR TREND: CORRELATIECOËFFICIËNT VAN PEARSON.....	70
6.5 TOETS VOOR TREND: RANGCORRELATIECOËFFICIËNT VAN SPEARMAN	73
6.6 MANN-KENDALL TOETS	77
6.7 SEASONAL KENDALL I TOETS.....	81
6.8 SEASONAL KENDALL II TOETS	83
6.9 LETTENMAIER TOETS VOOR TREND	90

7 ANALYSE VAN DE EFFECTEN VAN BELEIDSMAATREGE-

LEN: STAPTRENDS..... 93

7.1 T-TOETS VOOR GEMIDDELDEN.....	94
7.2 T-TOETS VOOR GEPAARDE STEEKPROEVEN	98
7.3 WILCOXON SIGNED RANK TOETS.....	100
7.4 WILCOXON RANK SUM TOETS	102

8 VRACHTEN..... 105

8.1 INLEIDING	105
8.2 DEFINITIES	106
8.3 BEMONSTERING.....	107
8.3.1 DEBIET	107
8.3.2 DRAAIUREN GEMALEN.....	107
8.3.3 CONCENTRATIE.....	107
8.4 DE RELATIE TUSSEN DEBIET EN CONCENTRATIE	108
8.5 BEREKENINGSMETHODEN.....	110
8.5.1 ALGEMENE BENADERING VOOR DE BEREKENING VAN VRACHTEN	110
8.5.2 KEUZE BEREKENINGSMETHODE	111
8.5.3 INTERPOLATIEMETHODEN TER BEREKENING VAN VRACHTEN.....	112
8.5.4 OVERIGE METHODEN	116
8.5.5 SCHATTEN VAN ONTBREKENDE GEGEVENS	117
8.6 EXTRAPOLATIE VAN RESULTATEN NAAR ANDERE GEBIEDEN	120
8.7 CASES	121
8.7.1 VRIJ AFSTROMEND: VRACHTEN IN DE MOSBEEK	121
8.7.2 TOEPASSINGEN VAN VERSCHILLENDE (AANGEPASTE) BEREKENINGSMETHODEN IN HET GEVAL VAN BEMALINGSUREN - MEETGEBIED VIERHUIS, FRIESLAND.....	124

LITERATUUR

BIJLAGEN

1. Rechter overschrijdingskansen van de standaard normale verdeling
2. Overschrijdingskansen van de Students t-verdeling
3. Rechter overschrijdingskansen van de F-verdeling
4. Overschrijdingskansen van de χ^2 -verdeling
5. Approximate Critical Values λ_{i+1} for Rosner's Generalized ESD Many Outlier Procedure
6. Lilliefors test: Critical values for T_2
7. Quantiles of the Shapiro-Wilk W Test for Normality
8. Coefficients a_i for the Shapiro-Wilk W Test for Normality
9. *Skew*: One sided critical values
10. *Kurtosis*: Two sided critical values
11. Overschrijdingskansen Kendall S-toetsingsgrootheid
12. Overschrijdingskansen voor de Rangcorrelatiecoëfficiënt van Spearman
13. Quantiles of the Wald Wolfowitz total number of Runs statistic

TEN GELEIDE

De regionale waterbeheerders onderhouden allemaal een routinemeetnet, waarbij op een groot aantal meetpunten, meestal maandelijks de waterkwaliteit wordt bepaald. Met het onderhouden van een dergelijk meetnet zijn aanzienlijke kosten gemoeid. Voor al deze meetinspanningen worden diverse doelstellingen gehanteerd, zoals het bepalen van de actuele waterkwaliteit, het toetsen aan normen, de detectie van trends en het opstellen van massabalansen.

Al deze doelstellingen vragen de toepassing van verschillende statistische technieken en daaraan gerelateerd verschillende meetstrategieën. In het algemeen wordt hier bij het inrichten van meetnetten weinig aandacht aan geschonken, met als gevolg dat de informatie die resulteert vaak niet voldoende is om specifieke onderzoeksvragen te beantwoorden. In dit verband spreekt men wel van het *'Data Rich, Information Poor'* syndroom, waaraan veel meetnetten leiden.

Om die reden heeft de STOWA het International Centre of Water Studies (ICWS) en de LU Wageningen, vakgroep Waterkwaliteitsbeheer en Aquatische Ecologie in 1996 opdracht gegeven een studie uit te voeren met als doel het ontwikkelen van een methodiek voor de evaluatie en optimalisatie van routine waterkwaliteitsmeetnetten, waarmee tegen zo gering mogelijke kosten zo veel mogelijk informatie kan worden verkregen.

De studie is uitgevoerd door het International Centre of Water Studies (ICWS) te Amersfoort en de LU Wageningen, leerstoelgroep Aquatische Ecologie en Waterkwaliteitsbeheer. Projectteam: drs. P.J. van der Wiele en ing. L.G. de Vree (ICWS), ir. M.W. Blind en ir. R.H. Aalderink (LU Wageningen). Het onderzoek is begeleid door een door de STOWA ingestelde begeleidingscommissie, bestaande uit mw. ir. A.E. Dommering en ir. H. de Ruiter (Hoogheemraadschap van Schieland), drs. R.H.C. van den Heuvel (Zuiveringschap Limburg), mw. ir. H.H. Kielich (Waterschap Regge en Dinkel), dr. S.P. Klapwijk (STOWA), ir. R. Maasdam (Waterschap Friesland), ing. J. Stroom (Hoogheemraadschap van Rijnland) en ing. T-W. van Urk (RIZA).

Namens de STOWA, de begeleidingscommissie en de uitvoerders spreek ik de hoop uit dat dit rapport zal leiden tot optimalisaties van meetnetten bij waterbeheerders en tot het bestrijden van het *'Data Rich, Information Poor'* syndroom.

Utrecht, februari 1998

De directeur van de STOWA,

drs. J.F. Noorthoorn van der Kruijff

1 INLEIDING

1.1 ONDERZOEKSKADER

Sinds de invoering van de WVO in 1970 - en in sommige delen van Nederland ook al geruime tijd daarvoor - wordt de kwaliteit van de oppervlaktewateren in Nederland structureel onderzocht. Dit onderzoek dat door RIZA (alleen rijkswateren) en de regionale waterkwaliteitsbeheerders wordt uitgevoerd, is gebaseerd op een min of meer vast meetprogramma. Na enige vorm van gegevensbewerking (veelal toetsing aan normen) vindt een deel van de verzamelde meetgegevens zijn weg naar jaarverslagen, notities en onderzoeksrapporten. Deze informatie vormt een basis voor de ontwikkeling van nieuw of voor aanpassingen van bestaand beleid.

Waren in het begin het vaststellen van de actuele waterkwaliteit en normtoetsing de belangrijkste meetnetdoelstellingen, in de loop der tijd is de informatiebehoefte van de beheerders en beleidsmakers toegenomen (Kader 1-1; Whitfield, 1988; Semmekrot en Knobben, in voorbereiding).

Kader 1-1

In de praktijk blijkt dat de routinematig verkregen data onvoldoende mogelijkheden bieden om de voor de beheerder noodzakelijke informatie te verkrijgen. Dit heeft onder meer te maken met de verschuiving in de wijze van interpretatie van data: in plaats van visuele analyse en berekening van kengetallen voor normtoetsing bestaat allengs meer behoefte aan statistische dataverwerking. Het is bijvoorbeeld inmiddels gebruikelijk om niet alleen aan

Een routinematig meetnet dient uiteenlopende doelen. De meest voorkomende zijn:

- norm- en functietoetsing;
- beschrijving algemene (actuele) waterkwaliteit;
- detecteren van langjarige (monotone) trends (trenddetectie);
- berekening van vrachten en opstellen van balansen;
- evaluatie van effecten van uitgevoerde beleidsmaatregelen (staptrend of trendbreuk).

te geven dat er iets is veranderd, maar ook aan te geven of deze verandering significant is, zeggen of deze verandering niet een natuurlijke oorsprong heeft. Het is ook steeds vaker gewenst om aan te geven hoe groot de kans is dat een toetsingsuitkomst fout is.

De verschuiving naar statistische verwerkingsmethoden leidt onherroepelijk tot de conclusie dat het huidige meetsysteem een onevenwichtige informatie-opbrengst veroorzaakt. Door de verschillen in datastructuur (variabiliteit in de data respectievelijk in het systeem) is de hoeveelheid informatie van de in een meetnet opgenomen meetpunten en variabelen in beginsel verschillend. De gevraagde informatie laat zich derhalve soms gemakkelijk, soms moeilijk en soms niet uit de routinematig verzamelde data extraheren. Een en ander kan ertoe leiden dat knelpunten niet (tijdig) onderkend worden of dat deze niet adequaat kunnen worden geprioriteerd.

Om bovengenoemde redenen is de doelmatigheid van beleid niet altijd optimaal. Bijgevolg wordt de laatste jaren steeds vaker de vraag gesteld of routinematig verzamelde gegevens voldoende basis bieden voor een gefundeerde beantwoording van de vanuit het beleid gestelde vragen, en of de verzamelde informatie nog wel voldoende actualiteitswaarde heeft (toetsing aan informatiebehoefte; o.a. Breukel en Schäfer, 1991; Klavers, 1992 en Adriaanse, 1993).

De laatste jaren hebben de waterbeheerders te maken gehad met grootschalige veranderingen in structuur en werkwijze. Een proces dat nog steeds voortduurt. Aanpassingen in de begrenzing van het beheersgebied - bewerkstelligd door reorganisaties om daarmee aan te sluiten bij de inmiddels algemeen geaccepteerde stroomgebiedsbenadering, en de groeiende vraag naar informatie over (het functioneren en de kwaliteit van) watersystemen en daarmee de stijgende kosten van het meetnet, leiden steeds vaker tot een kritische beschouwing van operationele meetnetten.

Veel van de hiervoor geschetste problemen kunnen worden opgelost door het bestaande meetnet te optimaliseren. Optimalisatie van de meetfrequentie kan bijvoorbeeld leiden tot een evenwichtiger informatie-opbrengst, maar ook tot een beter gebiedsdekkend beeld van de waterkwaliteit.

Om meetnetten echter zodanig te kunnen herinrichten, dat beschikbare budgetten zo efficiënt mogelijk worden ingezet, en alleen die informatie wordt gegenereerd die relevant is voor het beleid, zijn goed gefundeerde stappenplannen en dito technieken een vereiste.

Op dit moment bestaat er in Nederland echter geen leidraad of protocol voor de evaluatie en optimalisatie van routinematige kwaliteitsmeetnetten. De (her)inrichting of optimalisatie van menig regionaal en nationaal meetnet heeft hierdoor tot op heden veelal plaatsgevonden vanuit een pragmatische invalshoek en op basis van *expert judgement* in plaats van op gestructureerde, mede op de statistiek gebaseerde methoden. Gezien het complexe karakter van een meetnetoptimalisatie - waarbij met een scala aan randvoorwaarden rekening dient te worden gehouden - en het huidige kennisniveau van statistische verwerkingsmethoden bij de gemiddelde waterbeheerder, is dit niet zo verwonderlijk, maar is er desalniettemin sprake van een ongewenste situatie.

Het ontbreken van een adequaat instrumentarium en de dringende behoefte hieraan - mogelijk mede versterkt door de huidige trend van steeds verdergaande standaardisering van methoden en technieken in het kwaliteitsbeheer - vormden voor STOWA de aanleiding om het onderzoek "*Evaluatie en optimalisatie van meetnetten*" te starten. Gezien de inhoud van het project en de verschillende in de projectperiode in uitvoering zijnde parallelprojecten¹ is deze oorspronkelijke hoofdtitel uiteindelijk uitgebreid tot *Analyse en optimalisatie van oppervlaktewatermeetnetten*.

1.2 PROJECTDOELSTELLINGEN

De belangrijkste doelen van het project zijn:

1. Identificatie en beschrijving van bruikbare statistische verwerkingstechnieken bij de interpretatie van routinematig verzamelde waterkwaliteitsgegevens in relatie tot de belangrijkste meetnetdoelstellingen, en daaraan gekoppeld meetnetoptimalisatie.
2. Illustratie van deze technieken aan de hand van praktijkonderzoek (*case-studies*).
3. Ontwikkeling van richtlijnen (beslisschema's en stappenplannen) bij de keuze en voor een juist gebruik van de beschreven (statistische) technieken.
4. Inventarisatie van bestaande statistische programmatuur die bruikbaar is voor de statistische analyse van waterkwaliteitsgegevens en voor meetnetanalyse (beide met het oog op meetnetoptimalisatie).
5. Het leveren van een theoretisch kader, alsmede een instrumentarium (*tools*) waarmee de waterbeheerder op adequate wijze de analyse en optimalisatie van zijn reguliere meetnet ter hand kan nemen (betreft resp. stappenplannen die ingaan op te maken keuzen en toe te passen technieken en toetsen, formules en het computerprogramma WatQual voor het uitvoeren van analyses en berekenen van kengetallen noodzakelijk voor de optimalisatie).
6. Beperkte evaluatie van de toepassingsmogelijkheden van (geïntegreerde) data-analyse- en meetnetoptimalisatiesoftware.

¹ Optimalisatie grondwatermeetnetten (Jousma et al., 1998) en PIM (Semmekrot en Knoben, in voorbereiding).

1.3 OPBOUW TOTALE RAPPORTAGE

De eindrapportage bestaat uit 3 delen. De rol en globale inhoud van ieder van deze delen is als volgt:

Deel 1 vormt het hoofdrapport, is probleem-geöriënteerd en geeft in vogelvlucht de belangrijkste aspecten van data-analyse en meetnetoptimalisatie weer. In dit deel worden beslisschema's en stappenplannen met betrekking tot data-analyse en meetnetoptimalisatie op hoofdlijnen beschreven. Het deel is gericht op de manager, die een beknopt overzicht van problemen en oplossingen wil verkrijgen.

De delen 2 en 3 zijn beide oplossingsgericht.

Deel 2 (het onderhavige rapport) bevat een actueel overzicht van de technieken en methoden die beschikbaar zijn voor de statistische analyse van langjarige meetreeksen met het oog op meetnetevaluatie en -optimalisatie en is geschreven voor de data-analist. Tevens wordt enige aandacht geschonken aan enkele statistische basisbegrippen, daarbij inspelend op de door de begeleidingscommissie aangegeven informatiebehoefte.

Voor wat betreft de vorm is hier gekozen voor een naslagwerk, waarin de technieken naar meetdoelstelling (§1.1) zijn geclusterd. Opgenomen beslisschema's vergemakkelijken de keuze van de juiste toets(en). Naast de meest toegepaste (robuuste) methoden worden tevens alternatieve methoden behandeld. Toepassingsgebied, werking en randvoorwaarden voor gebruik worden gegeven. Middels gedetailleerde stappenplannen wordt het gebruik van de beschreven methoden nader toegelicht. Cases die ontleend zijn aan door regionale waterkwaliteitsbeheerders verzamelde meetgegevens en deels ook door hen zelf zijn uitgewerkt², complementeren het geheel en slaan een brug tussen de theorie en het praktisch nut.

Voor een uitgebreide leeswijzer van deel 2 wordt verwezen naar § 1.4.

Deel 3 is geschreven voor zowel de meetnetbeheerder als de eerder in relatie tot deel 2 genoemde data-analist en is te beschouwen als een werkdocument.

In dit deel staat de optimalisatie van het meetnet centraal. In het licht van het behandelde algemeen theoretisch kader wordt een algemeen stappenplan voor meetnetoptimalisatie gepresenteerd. In afzonderlijke hoofdstukken wordt dit algemene stappenplan per meetnetdoelstelling in detail uitgewerkt. Een soortgelijk schema is ook ontwikkeld voor de analyse van de meetnetdichtheid.

Eerdere versies van beide schema's zijn in het verleden bij enkele waterbeheerders toegepast, en hebben destijds hun praktisch nut reeds bewezen (o.a. Blind en Aalderink, 1995a en b).

² Bijdragen zijn geleverd door Hoogheemraadschap van Rijnland, Hoogheemraadschap van Schieland, Waterschap Friesland, Waterschap Regge en Dinkel en Zuiveringschap Limburg.

1.4 LEESWIJZER DEEL 2

Deel 2 is gericht op de beschrijving van bestaande methoden en technieken voor data-analyse, in het bijzonder in relatie tot de evaluatie van routinematige meetnetten. Methoden die nodig zijn voor de feitelijke optimalisatie van het meetnet, ontbreken derhalve in dit deel, maar worden nader beschreven in deel 3 van deze rapportage. Na een beschrijving van het algemeen theoretisch kader wordt voor ieder van deze methoden en technieken in detail ingegaan op ondermeer het toepassingsgebied, de werking en de randvoorwaarden voor gebruik.

In hoofdstuk 2 wordt aandacht geschonken aan enkele basisbegrippen, daarbij inspelend op een door de waterbeheerders aangegeven behoefte. In dit hoofdstuk wordt ingegaan op algemene begrippen zoals statistische verdelingen (§ 2.1), het toetsen van statistische hypothesen (§ 2.2) en hoe met het onbetrouwbaarheidsniveau dient te worden omgegaan (§ 2.3). In § 2.4 wordt het verschil tussen zogenaamde geparameteriseerde statistische toetsen en verdelingsvrije toetsen uiteengezet en in § 2.5 wordt kort ingegaan op het gebruik van transformaties.

Bij het bewerken van meetgegevens en het toetsen van hypothesen loopt men in de praktijk tegen vele praktische problemen aan. Gegevens zijn gerapporteerd als 'kleiner dan', ontbreken, of de metingen zijn niet gelijkmatig (equidistant) in de tijd genomen. Daarnaast stellen veel toetsen specifieke eisen aan de verdeling van de data, hun onderlinge onafhankelijkheid en, met name bij tijdreeksen, verschillen in spreiding in de tijd. De hiervoor gebruikte statistische bewerkingen worden beschreven in hoofdstuk 3. Hoe met detectielimieten moet worden omgegaan is beschreven in § 3.6. Hoe van een niet equidistante reeks een equidistante reeks gemaakt kan worden staat beschreven in § 3.8. In deze paragraaf wordt aangegeven hoe op basis van data-aggregatie van een reeks met ontbrekende gegevens een reeks gegenereerd kan worden zonder missende data.

De belangrijkste analyses en kengetallen die samenhangen met periodiciteit (seizoensinvloed), normaliteit, homogeniteit van variantie en afhankelijkheid van waarnemingen worden beschreven en toegelicht in hoofdstuk 4. Deze kengetallen vormen veelal de randvoorwaarden voor de toetsen die in de hierop volgende hoofdstukken worden beschreven. De belangrijkste beslissingscriteria worden in dit hoofdstuk met behulp van schema's beschreven en toegelicht.

De methoden en analyses die betrekking hebben op de verschillende aspecten, die tijdens een meetnet-evaluatie kunnen worden onderscheiden, worden beschreven in de hoofdstukken 5 tot en met 8:

- analyse van de actuele waterkwaliteit en normtoetsing (hoofdstuk 5);
- analyse van ontwikkelingen van de waterkwaliteit in de vorm van monotone trends (hoofdstuk 6);
- analyse van de effecten van beleidsmaatregelen: staptrends (hoofdstuk 7);
- analyse van vrachten en balansen (hoofdstuk 8).

Aan de hand van schema's worden voor elk van de bovengenoemde aandachtspunten de keuzes besproken die mogelijk tijdens de evaluatie ten aanzien van de beschikbare methoden moeten worden gemaakt. Naast de meest toegepaste (robuuste) methoden worden tevens alternatieven behandeld. Middels een gedetailleerd stappenplan wordt het gebruik van de beschreven methoden nader toegelicht. Cases die ontleend zijn aan door regionale waterkwaliteitsbeheerders verzamelde meetgegevens en deels ook door hen zelf zijn uitgewerkt, completeren het geheel en slaan een brug tussen de theorie en het praktisch nut.

Bij de beschrijving van de verschillende methoden wordt uitgegaan van een zekere basiskennis met betrekking tot (statistische) data-analyse.

Voor alle in deel 2 beschreven statistische toetsen en bewerkingen is bij de behandeling (waar dit van toepassing is) aangegeven of de meetreeks equidistant in de tijd moet zijn, en of ontbrekende gegevens de uitvoering van de bewerking frustreren. Eveneens is per toets aangegeven welke statistische randvoorwaarden van toepassing zijn. Een toets kan altijd uitgevoerd worden, ook al 'mag' dit op grond van de randvoorwaarden niet. Bij de interpretatie moet hier echter wel rekening mee worden gehouden. Voor een discussie over statistiek en randvoorwaarden zie bijlage 1 van deel 1.

Bij het uitvoeren van bewerkingen en dient men zich er steeds van bewust te zijn, dat datasets in het algemeen gecorrigeerd moet worden voor seizoensinvloed, trend en mogelijk afvoer (debiet)alvorens deze acties tot zinvolle resultaten leiden. Het wel of niet corrigeren voor deze factoren hangt veelal af van de concrete vraagstelling. Daar waar eventuele voorbewerkingen noodzakelijk zijn, is dit expliciet in de tekst aangegeven.

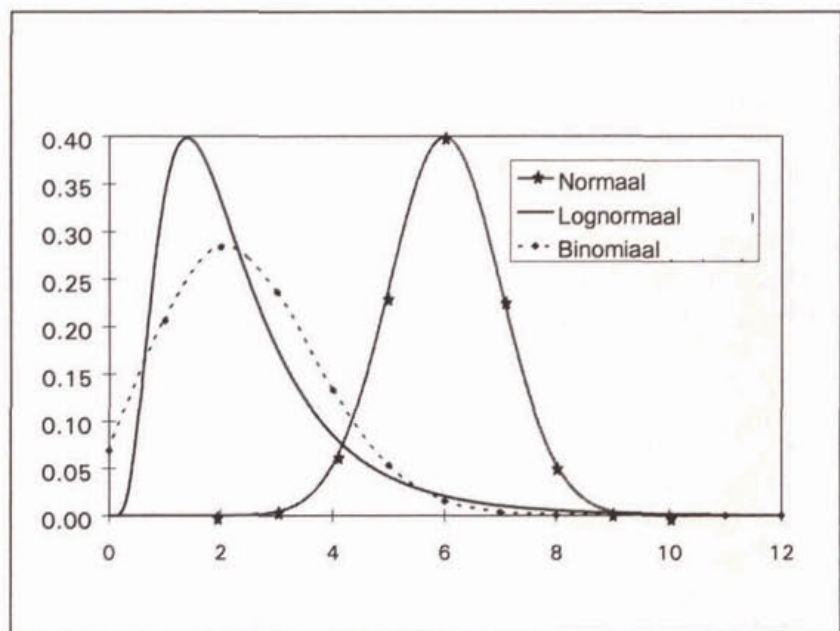
2 BASIS

2.1 STATISTISCHE VERDELINGEN

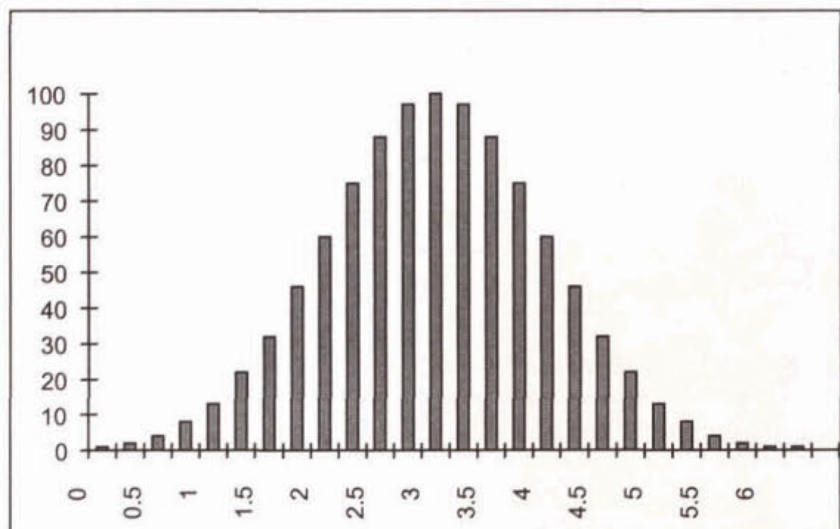
In de statistiek wordt gebruik gemaakt van theoretische kansverdelingen. De meest bekende verdelingen zijn de (standaard) normale verdeling, de log normale verdeling, de Student t-verdeling, de Chi-kwadratverdeling, de Poissonverdeling, binomiale en de Fischer of F-verdeling. In Figuur 2-1 zijn enkele verdelingen weergegeven.

De (standaard) normale verdeling, de Student t-verdeling en de Poisson-verdeling zijn symmetrische verdelingen (de curven zijn links en rechts van de top gelijkvormig). De Student t-verdeling lijkt erg veel op de (standaard) normale verdeling en bij grote aantallen meetwaarden (≈ 30) gaat de Student t-verdeling over in de standaard normale verdeling. De lognormale verdeling, de Chi-kwadratverdeling en de F-verdeling zijn asymmetrische verdelingen (de curven zijn links en rechts van de top niet gelijkvormig en de top ligt links van het midden) en alle waarden zijn groter dan of gelijk aan nul.

Met betrekking tot de statistische analyse van waterkwaliteitsvariabelen zijn de (standaard) normale verdeling en de lognormale verdeling het meest relevant.



Figuur 2-1: Voorbeelden van de normale, lognormale en binomiale kansverdeling



Figuur 2-2: Frequentieverdeling data meetreeks

(Standaard) normale verdeling

Bij metingen aan een populatie in de 'natuur' blijkt vaak, dat de meetwaarden zich volgens een bepaalde verdeling rond een gemiddelde gedragen. Als de meetwaarden worden ingedeeld in klassen en de aantallen meetwaarden in de verschillende klassen grafisch weergegeven worden, verschijnt er een curve in de vorm van een klok (Figuur 2-2).

Deze empirische verdeling is wiskundig goed te beschrijven met het model voor de normale verdeling, of een "Gaussische curve". De normale verdelingscurve is dus een model voor de beschrijving van een populatie. De algemene wiskundige formule behorende bij de normale curve is:

$$y = \frac{1}{\sigma \sqrt{2\pi} e^{\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}} \quad (1)$$

De curve van de normale verdeling is symmetrisch, daardoor vallen het gemiddelde, de mediaan (de middelste waarde) en de modus (waarde met de hoogste frequentie) samen. De vorm van de curve wordt bepaald door het gemiddelde μ (§ 3.1) en de standaarddeviatie σ (§ 3.4) van de waarnemingen. Omdat het gemiddelde en de standaarddeviatie oneindig veel waarden kunnen aannemen, bestaan er dus ook oneindig veel normale verdelingen.

Door transformatie is van de normale verdeling een standaard normale verdeling te maken. Bij de standaard normale verdeling is het gemiddelde 0 en de standaarddeviatie 1. De standaard normale verdeling ontstaat uit de normale verdeling door de volgende omzetting van alle meetwaarden:

$$\text{nieuwe waarde} = \frac{\text{meetwaarde} - \text{gemiddelde}}{\text{standaarddeviatie}} = \frac{x - \bar{X}}{s} \quad (2)$$

Voor de (standaard) normale verdeling geldt dat (enkele bekende) percentielen gedefinieerd zijn op vaste afstanden van het gemiddelde:

• 50%	van de waarnemingen ligt tussen	$\mu \pm 0.674 \times \sigma$
• 68.2%	van de waarnemingen ligt tussen	$\mu \pm 1 \times \sigma$
• 90%	van de waarnemingen ligt tussen	$\mu \pm 1.645 \times \sigma$
• 95%	van de waarnemingen ligt tussen	$\mu \pm 1.960 \times \sigma$
• 95.4%	van de waarnemingen ligt tussen	$\mu \pm 2 \times \sigma$
• 99%	van de waarnemingen ligt tussen	$\mu \pm 2.57 \times \sigma$
• 99.7%	van de waarnemingen ligt tussen	$\mu \pm 3 \times \sigma$

Lognormale verdeling

De lognormale verdeling is evenals de standaard normale verdeling afgeleid van de normale verdeling. De lognormale verdeling wordt verkregen door voor alle waarden de natuurlijke logaritme ($\ln(x)$) te berekenen. Veel 'natuurlijke' meetreeksen zijn meestal niet normaal maar wel lognormaal verdeeld.

De lognormale verdeling is een asymmetrische verdeling (Figuur 2-1). De top ligt links van het midden en de verdeling heeft een lange uitloop naar rechts. Er zijn dus meer lage meetwaarden dan hoge. Gemiddelde, mediaan en modus, vallen niet samen, maar er geldt:

$$\text{Modus} < \text{mediaan} < \text{gemiddelde}$$

2.2 STATISTISCHE TOETSEN EN HYPOTHESEN

In het algemeen zijn statistische toetsen gebaseerd op steekproeven. In theorie zijn steekproeven behept met onnauwkeurigheden. Een statistische toets zal diensgevolge bij elke steekproef een verschillende uitkomst hebben. Het resultaat van een statistische toets, ook wel toetsingsgrootheid genoemd, is derhalve een kansvariabele. Vrijwel alle toetsen zijn zodanig ontwikkeld dat de toetsingsgrootheid een bekende statistische verdeling volgt.

De vraag is nu hoe kan worden vastgesteld bij welk steekproefresultaat we de uitkomst accepteren of wanneer we deze verwerpen. Dit proces staat bekend als het toetsen van hypothesen. In het algemeen wordt een hypothese als volgt gedefinieerd:

H_0 : het gemiddelde is x ;
 H_A : het gemiddelde is niet x .

In principe zijn vier uitkomsten oftewel beslissingen mogelijk: twee ervan zijn goed, de andere fout. De goede beslissingen zijn:

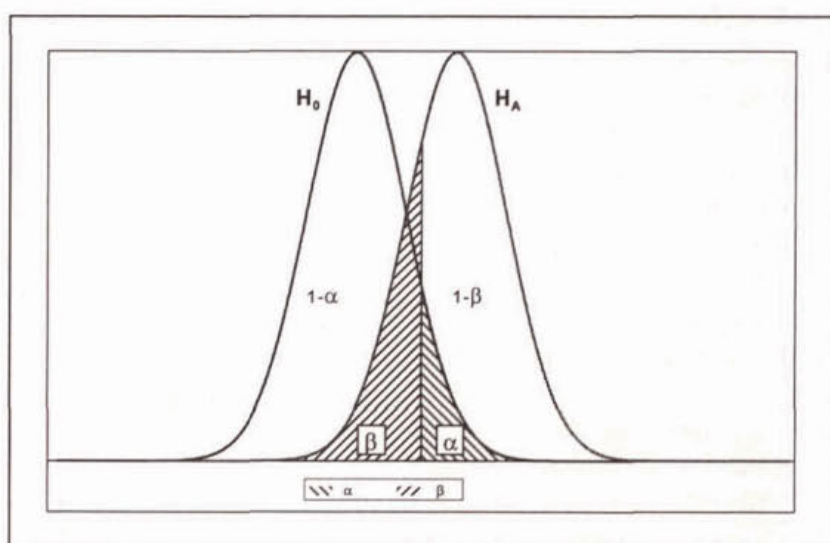
- de H_0 -hypothese is waar en wordt geaccepteerd;
- de H_0 -hypothese is niet waar en wordt terecht verworpen.

De foutieve beslissingen zijn aan de orde wanneer:

- de H_0 -hypothese waar is, maar wordt verworpen. Dit wordt een fout van de eerste soort genoemd, met een kans α . Deze fout wordt ook wel aangeduid met significantieniveau of onbetrouwbaarheidsniveau;
- de H_0 -hypothese geaccepteerd wordt, terwijl H_0 niet waar is. Hier is sprake van een fout van de tweede soort, met een kans β .

Hoe deze fouten in de curve van de normale verdeling gelegen zijn, is uiteengezet in Figuur 2-3 en in Schema 2-1.

Het onderscheidend vermogen van een toets is gedefinieerd als zijnde de kans dat H_0 terecht wordt verworpen en is dus gelijk aan $1-\beta$.



Figuur 2-3: Type I (α) en II (β) fout

Schema 2-1: Toetsresultaten hypothesen

Beslissing	De werkelijkheid	
	H_0 is waar	H_A is waar
Accepteer H_0	betrouwbaarheid $1-\alpha$	fout 2 ^e soort β
Verwerp H_0	fout 1 ^e soort α	onderscheidend vermogen $1-\beta$

2.3 DE KEUZE VAN HET (ON)BETROUWBAARHEIDS-NIVEAU

In de statistiek wordt met het onbetrouwbaarheidsniveau α de kans bedoelt dat de H_0 -hypothese onterecht verworpen wordt (§ 2.2). Bij trendanalyse bijvoorbeeld, is dit dus de kans dat men denkt dat er een trend is terwijl deze er daadwerkelijk niet is (respectievelijk de oppervlakte α en $1-\alpha$ in Figuur 2-3). Het onbetrouwbaarheidsniveau is onafhankelijk van de data, en is alleen afhankelijk van de eisen van het management. In veel gevallen wordt een drempel van (tweezijdig) 0.05 gehanteerd. Indien, in het voorbeeld van trendanalyse, een lagere α wordt gehanteerd, wordt de kans kleiner dat de toetsingsuitkomst aangeeft dat er een trend is, terwijl deze er in werkelijkheid niet is. Een verlaging van α betekent dus dat de hypothese 'geen trend' minder snel verworpen wordt (de oppervlakte onder $1-\alpha$ in Figuur 2-3 wordt groter). Dit houdt echter ook in dat de kans groter wordt dat een wel degelijk aanwezige trend niet wordt aangetoond (de oppervlakte onder α in Figuur 2-3 wordt kleiner). Men kan dus niet het onbetrouwbaarheidsniveau willekeurig laag kiezen.

De keuze voor α hangt daarom af van de situatie. Stel bijvoorbeeld dat een waterbodem gesaneerd moet worden indien deze een bepaald vervuilingsniveau overschrijdt. Aangezien hier veelal hoge kosten mee gemoeid zijn is zekerheid omtrent de vervuiling gewenst. Worden de saneringsnormen wel overschreden? Deze vraagstelling komt neer op de statistische toets van de hypothese 'er is geen vervuiling' tegenover het alternatief: 'er is vervuiling'. Men wil de kans α dat de hypothese 'geen vervuiling' onterecht verworpen wordt, en dus onterecht geld wordt gespendeerd, zo gering mogelijk houden. Een onbetrouwbaarheidsniveau van 0,01 (1%) of lager ligt dan voor de hand. Indien met de toets echter een classificatie in sterk en niet sterk verontreinigde sedimenten beoogd wordt, waarbij men vervolgens nadere analyses uit wil voeren op de data van sterk vervuilde sedimenten, is een onbetrouwbaarheidsniveau van 0,1 (10%) mogelijk geschikt: er is dan weliswaar een redelijke kans dat 'schone' sedimenten bij het vervolgonderzoek worden betrokken, anderzijds is de kans ook kleiner dat wel verontreinigde sedimenten niet bij het vervolgonderzoek worden betrokken.

Indien een toets bij $\alpha=0.1$ wordt uitgevoerd, kan alleen verwacht worden dat van alle toetsen waarvan de nulhypothese (H_0) verworpen wordt maximaal 10% ten onrechte verworpen wordt. Het is zeker niet zo dat men kan verwachten dat 10% van de toetsingsuitkomsten foutief zijn. α is onafhankelijk van de data.

Wanneer dezelfde toets op 100 meetreeksen wordt uitgevoerd, waarbij 100 keer de hypothese verworpen wordt, kan niet verwachten worden, dat de toetsingsuitkomst fout is: de hypothese dat de concentratie -10.0 mg/l is, moet tenslotte altijd verworpen worden, ook bij $\alpha=0.1$!

In veel gevallen kan berekend worden hoe groot de kans is dat de hypothese onterecht verworpen wordt. Deze kans, de zogenaamde p-waarde (probability), hangt in tegenstelling tot α af van de data. Indien de p-waarde kleiner is dan de onbetrouwbaarheid α dan kan de hypothese bij deze α worden verworpen. De p-waarde wordt ook wel de berekende onbetrouwbaarheid genoemd. In tegenstelling tot een toetsingsuitkomst gebaseerd op α , waarmee een 'wel-niet verwerpen' verkregen wordt levert de p-waarde meer informatie. De p-waarde maakt het mogelijk dat mensen hun eigen evaluatie kunnen maken: de keuze van α is tenslotte subjectief. Indien eisen voor sanering gebaseerd zijn op een onbetrouwbaarheid van een toets (α) en deze eisen veranderen dan is het niet nodig om alle toetsen opnieuw uit te voeren (mits er geen data zijn bijgekomen). Toetsing van de p-waarde aan de nieuwe eisen volstaat. Tenslotte laat de p-waarde toe saneringen te prioriteren. Het meetpunt met de laagste p-waarde is het sterkst vervuild.

Men dient bewust te zijn van het feit dat de berekening van de p-waarde zeer sterk gerelateerd is aan de statistische theorie (de statistische randvoorwaarden) enerzijds, en van de schattingen op basis

van de werkelijke data anderzijds. De p-waarde is betrouwbaarder naarmate de data beter voldoen aan de randvoorwaarden van een toets. Daarnaast is zij sterk afhankelijk van het aantal waarnemingen: bij kleine aantallen waarnemingen wordt de onbetrouwbaarheid groot. Bovendien wordt er in software-pakketten vaak gebruik gemaakt van benaderingen die alleen voor grote aantallen data gelden. Bij geringe aantallen moeten exacte tabellen voor kritieke waarden gebruikt worden, omdat de p-waarde hierbij vaak (nog) niet te berekenen is.

2.4 VERDELINGSVRIJE VERSUS PARAMETRISCHE METHODEN

Statistische toetsen kunnen (onder andere) onderverdeeld worden in verdelingsvrije en geparameteriseerde methoden. Bij geparameteriseerde methoden wordt gebruik gemaakt van de originele meetgegevens om de toetsingsgrootte te bepalen. Bij verdelingsvrije methoden worden rangnummers aan de meetgegevens toegekend en wordt de toetsingsgrootte aan de hand van de rangnummers berekend (§ 3.10).

Onderzoek heeft aangetoond dat waterkwaliteitsvariabelen vaak niet-normaal verdeeld zijn (Blind, 1993). Bij de verwerking van waterkwaliteitsgegevens wordt om deze reden waar mogelijk gebruik gemaakt van verdelingsvrije methoden, aangezien deze twee grote voordelen ten opzichte van de geparameteriseerde methoden hebben. Ten eerste is - a priori - geen kennis omtrent de statistische verdeling noodzakelijk. Ten tweede hebben uitbijters relatief weinig effect op de uitkomsten van de toets: de toets is zogenaamd robuust met betrekking tot uitbijters.

Voor veel geparameteriseerde en verdelingsvrije toetsen geldt dat de waarnemingen respectievelijk de rangnummers onderling onafhankelijk moeten zijn. Waarnemingen zijn onafhankelijk wanneer alle meetwaarden op elk tijdstip willekeurig rond het gemiddelde (μ) zijn verdeeld.

Belangrijke oorzaken voor het afhankelijk zijn van waarnemingen zijn periodiciteit (seizoensinvloeden) en trend.

Indien kennis omtrent de onderliggende verdeling van de gegevens beschikbaar is, zijn de toetsen die van deze kennis gebruik maken (de geparameteriseerde toetsen) gevoeliger. Aangezien kennis omtrent de verdeling in het algemeen niet beschikbaar is, wordt om het zekere voor het onzekere te nemen, gebruik gemaakt van verdelingsvrije methoden.

2.5 TRANSFORMATIES

Geparameteriseerde toetsen hebben in het algemeen een groter onderscheidend vermogen dan niet-parametrische toetsen, omdat ze gebruik maken van de kennis van een theoretische verdeling. Voor een toets met een hoog onderscheidend vermogen zijn in de regel minder meetwaarden nodig om met dezelfde betrouwbaarheid tot een uitspraak te komen dan een toets met een laag onderscheidend vermogen. Met het doel gebruik te kunnen maken van parametrische toetsen, worden transformaties uitgevoerd op datasets. In de praktijk wordt meestal voor een zodanige transformatie gekozen, dat na uitvoering de getransformeerde data voldoen aan een normale verdeling. Met een geschikte transformatie kan in het algemeen worden bereikt dat:

- de dataset meer symmetrisch wordt;
- de dataset meer lineair wordt;
- de variantie (meer) constant (homocedastisch) wordt.

Veelal zijn waterkwaliteitsdata min of meer normaal verdeeld, maar zijn er veel meer lage waarden dan hoge of juist het tegenovergestelde. Het beoogde resultaat van een transformatie is dat de *skew* (scheefheid; § 4.2) van een verdeling van een dataset over gaat in een meer symmetrische verdeling. Hiervoor worden transformaties gebruikt van het type $y=x^\theta$. Scheve verdelingen met een negatieve *skew* (met de piek rechts van het midden) worden gecompenseerd bij een $\theta < 1$ en verdelingen met een positieve *skew* met een $\theta > 1$. Naarmate de waarden voor θ dichterbij 1 gelegen zijn, is het effect van de transformatie milder. In Tabel 2-1 worden voor verschillende waarden voor θ de bijbehorende transformaties beschreven (Helsel en Hirsch, 1992).

Tabel 2-1: Transformaties ten behoeve van verdelingen met *skew*

Doel	θ	transformatie	opmerkingen
voor negatieve <i>skew</i>	n	$y = x^n$	hogere machten kunnen worden gebruikt
	3	$y = x^3$	derde macht
	2	$y = x^2$	kwadratisch
	1	$y = x$	geen transformatie
	$\frac{1}{2}$	$y = \sqrt{x}$	wortel
	$\frac{1}{3}$	$y = \sqrt[3]{x}$	3 ^e machtswortel
voor positieve <i>skew</i>	0	$y = \log(x)$	logaritme
	$-\frac{1}{2}$	$y = \frac{-1}{\sqrt{x}}$	reciproke wortel, het minteken in de teller is noodzakelijk voor het behoud van de oorspronkelijke volgorde van de meetwaarden
	-1	$y = \frac{-1}{x}$	reciprook
	-2	$y = \frac{-1}{x^2}$	
	-n	$y = \frac{-1}{x^n}$	lagere machten kunnen worden gebruikt

3 ALGEMENE STATISTISCHE BEWERKINGEN

In dit hoofdstuk worden de belangrijkste algemene statistische bewerkingen en methoden beschreven, die in de overige hoofdstukken herhaaldelijk terugkomen en waarnaar verwezen wordt.

3.1 (SEIZOENSGEWOGEN) GEMIDDELDE

In het algemeen wordt het gemiddelde beschreven met de formule:

$$\bar{X} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i \quad (3)$$

Wanneer in een meetreeks het aantal metingen over verschillende meetperioden uiteenloopt en sprake is van seizoensinvloeden, bijvoorbeeld in de zomer zijn meer metingen verricht dan in de winter, dan geeft het gemiddelde zoals berekend volgens bovenstaande formule niet de juiste waarde weer. Een dergelijke situatie kan aanleiding zijn tot het berekenen van een zogenaamd **(seizoens)gewogen gemiddelde**. Bij een seizoensgewogen gemiddelde wordt het gemiddelde van alle seizoensgemiddelden berekend.

Bij het berekenen van een seizoensgewogen gewogen gemiddelde kunnen twee situaties worden onderscheiden:

- alle seizoenen zijn in de tijd even lang, dat wil zeggen het maximale aantal metingen dat op basis van de meetfrequentie kan worden genomen is voor elk seizoen gelijk (bijv. bij kwartalen kunnen op basis van een wekelijkse bemonstering maximaal 13 monsters worden genomen);
- de seizoenen zijn niet allemaal even lang, bijvoorbeeld een zomerseizoen van 3 maanden waarin 12 wekelijkse monsters kunnen worden genomen versus een winterseizoen van 9 maanden waarin 40 wekelijkse monsters kunnen worden genomen.

Het seizoensgewogen gemiddelde wordt met behulp van de onderstaande formules berekend:

$$\bar{X}_p = \frac{1}{n_p} \sum_{i=1}^{n_p} x_{pi} \quad (\text{gemiddelde van één seizoen}) \quad (4)$$

$$\bar{X} = \frac{1}{P} \sum_{p=1}^P \bar{X}_p \quad (\text{gemiddelde van alle seizoensgemiddelden bij gelijke seizoenslengte}) \quad (5)$$

$$\bar{X} = \frac{1}{N} \sum_{p=1}^P n_p \bar{X}_p \quad (\text{gemiddelde van alle seizoensgemiddelden bij ongelijke seizoenslengte}) \quad (6)$$

Hierin is:

$\bar{X}_p$	het gemiddelde van periode (seizoen) p
$\bar{X}$	het gemiddelde van de seizoensgemiddelden bij p seizoenen.
N	het totaal aantal werkelijke meetwaarden
n_p	het aantal werkelijke meetwaarden in periode (seizoen) p
x_{pi}	meetwaarde i in periode (seizoen) p .
P	aantal seizoenen
N'	het totaal aantal mogelijke meetwaarden in alle seizoenen
n'_p	het aantal mogelijke meetwaarden in seizoen p

Het seizoensgewogen gemiddelde wordt op de volgende wijze berekend:

Stap 1: Met behulp van formule (4) wordt het gemiddelde per seizoen/periode berekend.

Stap 2: Als alle seizoenen een gelijke lengte hebben wordt het totale gemiddelde berekend met behulp van formule (5) en als de seizoenslengten niet allemaal gelijk zijn met formule (6).

3.2 (SEIZOENSGEWOGEN) MEDIAAN

Wanneer een dataset normaal verdeeld is, dan is per definitie het gemiddelde gelijk aan de mediaan. Naarmate de verdeling van een dataset afwijkt van de normale verdeling, lopen mediaan en gemiddelde uiteen. Om deze reden is de mediaan vaak representatiever voor de dataset dan het gemiddelde.

Evenals voor het gemiddelde kan het voorkomen dat in een dataset het aantal metingen over verschillende meetperioden uiteenloopt, bijvoorbeeld in de zomer zijn meer metingen verricht dan in de winter. Een dergelijke situatie kan aanleiding zijn tot het berekenen van een zogenaamd (seizoens)gewogen mediaan. Bij een seizoensgewogen mediaan wordt de mediaan van alle seizoensmedianen berekend.

De mediaan wordt volgens onderstaande formules berekend:

$$\begin{aligned} \text{Mediaan} &= x_{[\frac{1}{2}(N+1)]} && \text{wanneer } N \text{ oneven is} \\ \text{Mediaan} &= \frac{1}{2}(x_{[\frac{1}{2}N]} + x_{[\frac{1}{2}(N+2)]}) && \text{wanneer } N \text{ even is} \end{aligned} \quad (7)$$

Hierin is:

x	meetwaarde (met volgnummer [...])
N	totaal aantal meetwaarden

De mediaan wordt op de volgende wijze berekend (formule (7)):

Stap 1: Rangschik alle waarnemingen van klein naar groot.

Stap 2: Wanneer het aantal waarnemingen oneven is, dan is de middelste waarneming de mediaan.

Stap 3: Is het aantal waarnemingen even, dan wordt de mediaan het gemiddelde van de twee middelste waarnemingen.

Stap 4: Bij een seizoensgewogen mediaan wordt de mediaan van de afzonderlijke medianen per seizoen berekend, en vervolgens de mediaan van deze seizoensmedianen.

3.3 VARIANTIE

De variantie is een maat voor de spreiding van de meetwaarden in een dataset. Deze spreiding wordt berekend ten opzichte van het (rekenkundig) gemiddelde.

De variantie kan in theorie van elke (ruwe) dataset worden berekend. Afhankelijk van het doel waarvoor de variantie gebruikt wordt, dienen echter aanvullende eisen te worden gesteld aan de dataset waarvoor de variantie wordt berekend, zoals normaliteit en onafhankelijkheid. De berekening van de variantie dient dan vaak uitgevoerd te worden op een dataset waaruit alle bekende bronnen van spreiding zijn verwijderd. Voor de berekening van het aantal benodigde metingen bij een gegeven betrouwbaarheidsinterval rond het gemiddelde ten behoeve van de optimalisatie van de meetfrequentie of voor de Lettenmaiermethode voor de meetdoelstelling trenddetectie, zijn dit (stap)trend en seizoensinvloeden.

Evenals voor het seizoensgewogen gemiddelde of mediaan, kan indien er sprake is van verschillende aantallen metingen in verschillende seizoenen een seizoensgewogen variantie overwogen worden.

De variantie van een steekproef wordt berekend volgens onderstaande formules:

$$s^2 = \frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^{i=N} (x_i - \bar{X})^2 \quad (8)$$

$$s^2 = \frac{1}{N'^2} \sum_{p=1}^P \left[\frac{n_p'^2 s_p^2}{n_p} \left(1 - \frac{n_p}{n_p'} \right) \right] \quad (9)$$

Hierin is:

s^2	de steekproefvariantie (dit is de beste schatter van de populatievariantie σ^2)
$\bar{X}$	het gemiddelde van alle meetwaarden x_i
N	het totaal aantal werkelijke waarnemingen
n_p	het aantal werkelijke waarnemingen in seizoen p (bijv. het aantal dagen dat er gemeten is)
P	het aantal seizoenen
s_p^2	de steekproefvariantie voor seizoen p
N'	het totaal aantal mogelijke waarnemingen in alle seizoenen
n_p'	het aantal mogelijke waarnemingen in seizoen p (bijv. het aantal dagen in een seizoen als er sprake is van dagelijkse metingen)

De berekening van de variantie wordt als volgt uitgevoerd:

Stap 1: Bereken het gemiddelde van de waarnemingen.

Stap 2: Bereken de verschillen tussen de meetwaarden en het gemiddelde.

Stap 3: Kwadrateer alle verschillen.

Stap 4: Sommeer alle resultaten van stap 3.

Stap 5: Deel de som door het aantal waarnemingen minus 1.

Stap 6: Indien de lengte van seizoenen niet gelijk is wordt voor ieder seizoen p de variantie berekend zoals beschreven in stap 1 t/m 5. De totale variantie wordt vervolgens berekend met behulp van formule (9). Veelal wordt de term $1 - n_p/n_p'$ buiten beschouwing gelaten.

3.4 STANDAARDDEVIATIE

De standaarddeviatie is evenals de variantie (§ 3.3) een maat voor de spreiding van de meetwaarden rondom het gemiddelde. De standaarddeviatie is de wortel van de variantie:

$$s = \sqrt{\text{Variantie}} = \sqrt{s^2} \quad (10)$$

3.5 COVARIANTIE

De covariantie is een maatstaf voor de samenhang tussen twee variabelen. De covariantie wordt berekend volgens de formule:

$$s_{xy} = \frac{\sum_{i=1}^N (x_i - \bar{X})(y_i - \bar{Y})}{N - 1} \quad (11)$$

Hierin is:

s_{xy}	covariantie tussen de x en y waarden
x_i en y_i	individuele x en y meetwaarden
$\bar{X}$ en $\bar{Y}$	gemiddelden van respectievelijk de x en y waarden
N	totaal aantal paren bij elkaar horende x en y waarden

De berekening wordt als volgt uitgevoerd:

- Stap 1: Bereken het gemiddelde van respectievelijk de x en y waarden.
- Stap 2: Bereken de verschillen tussen de meetwaarden y_i en het gemiddelde van de y waarden.
- Stap 3: Bereken de verschillen tussen de meetwaarden x_i en het gemiddelde van de x waarden.
- Stap 4: Vermenigvuldig alle verschillen van stap 2 en 3.
- Stap 5: Sommeer alle resultaten van stap 4.
- Stap 6: Deel de som door het aantal waarnemingen minus 1.

3.6 DETECTIELIMIETEN

3.6.1 ALGEMEEN

Als meetwaarden ' $\leq$ ' zijn gerapporteerd, dat wil zeggen kleiner of gelijk aan de detectielimiet³, worden deze in het algemeen vervangen door $0.5 \times$ de detectielimiet. Aangezien verdelingsvrije methoden geen gebruik maken van de oorspronkelijke waarde, beïnvloedt de keuze voor een factor 0.5 de uitkomst van toetsen niet: de waarden op detectie niveau krijgen de laagste rangnummers. Als in de tijd verschillende detectielimieten zijn gehanteerd moeten alle waarden kleiner dan de hoogste

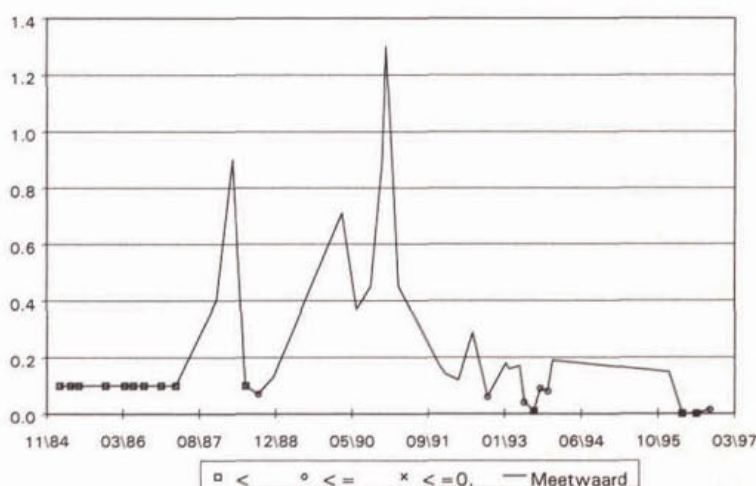
³ In geval van matrixeffecten wordt ook wel gesproken van aantoonbaarheidsgrens in plaats van detectielimiet.

detectielimiet vervangen worden door ' $\leq$ ' de hoogste detectielimiet. Als slechts incidenteel op de detectielimiet wordt gemeten is de fout die geïntroduceerd wordt door geen rekening te houden met verschillende detectielimieten verwaarloosbaar. Als de meeste meetwaarden onder de detectielimiet liggen en verschillende (steeds lager wordende) detectielimieten gehanteerd worden, is het verstandig om niet de gehele tijdreeks te analyseren. In dit geval levert het analyseren van de laatste periode met de laagste detectielimiet meer informatie op⁴.

Bij geparameteriseerde methoden wordt uitgegaan van een bepaalde kansverdeling van de waarnemingen. Dit betekent dat ook de waarden ' $\leq$ ' aan deze verdeling moeten voldoen. Door elke waarde ' $\leq$ ' met $0.5 \times$ de detectielimiet te vermenigvuldigen wordt een fout geïntroduceerd: bij incidenteel voorkomen van ' $\leq$ ' waarden is de geïntroduceerde fout verwaarloosbaar. Bij veelvuldig voorkomen verdient een verdelingsvrije methode de voorkeur.

3.6.2 VERSCHILLENDE DETECTIELIMIETEN IN EEN MEETREEKS

Met name met betrekking tot microverontreinigingen zijn de analytische mogelijkheden in de loop der jaren sterk verbeterd. Veel datasets hebben daarom last van in de tijd veranderende detectielimieten. Dit is geïllustreerd in. In het algemeen moeten de metingen onder de hoogste detectielimiet aangepast worden: alle gerapporteerde waarden die kleiner zijn dan de hoogste detectielimiet worden veranderd



Figuur 3-1: Meetreeks met verschillende detectielimieten

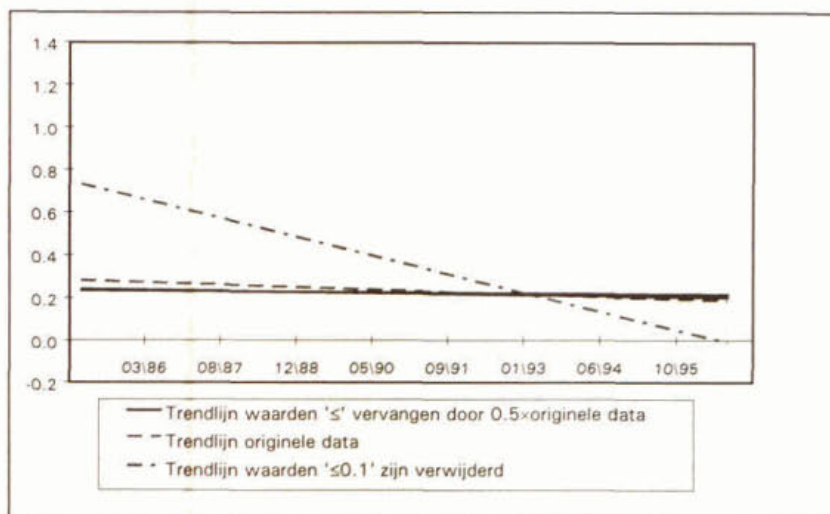
in de hoogste detectielimiet. In de figuur zijn 38 metingen opgenomen, waarvan in eerste instantie 12 gerapporteerd zijn op detectielimieten (≤ 0.1 , ≤ 0.01 of ≤ 0.001). Toepassing van alleen de hoogste detectielimiet betekent dat 18 metingen tijdens de analyse beschouwd worden als ≤ 0.1 . Dit is bijna de helft van de waarnemingen. Met een dergelijke dataset is het moeilijk rekenen. Er moet daarom overwogen worden een andere methode toe te passen. Door de waarnemingen die officieel op de hoogste detectielimiet liggen te verwijderen neemt het aantal waarnemingen af tot 29. Hiervan liggen er nog 3 op de detectielimiet. Twee waarnemingen (≤ 0.001) moeten aangepast worden tot ≤ 0.01 , om een redelijk verantwoorde statistische analyse te waarborgen.

Zowel bij het hanteren van de hoogste detectielimiet en het daaraan gekoppelde aanpassen van lagere meetwaarden, als bij het verwijderen van waarden op hoge detectielimiet uit de dataset gaat informatie verloren. Per meetreeks moet beoordeeld worden wat de beste oplossing is⁵.

⁴ Omwille van data-analyse is het gewenst dat altijd een meetwaarde wordt opgevoerd, ook al is deze ' $\leq$ '. Dit geldt ook voor negatieve metingen e.d.

⁵ Bij seizoensgebonden berekeningen kan in enkele gevallen een per seizoen verschillende detectielimiet worden gehanteerd.

Het hanteren van verschillende detectielimieten kan bijzondere gevolgen hebben voor het kwantificeren van een trend (Figuur 3-2). In het bovenstaande voorbeeld wordt een trend 'geïntroduceerd' op het moment dat de waarden ≤ 0.1 worden verwijderd. Dit heeft met name te maken met de ongelijke verdeling in de tijd van de waarden op de detectielimiet.



Figuur 3-2: Invloed van kwantificeren detectielimieten op de trendlijn

Concluderend kan men

stellen dat de analyse van datasets waarin veel (verschillende) detectielimieten zijn opgenomen een individuele aanpak vereist.

Bovendien moet men zich afvragen of de moeite voor het monitoren van stoffen waarvan de concentratie vaak onder de detectielimiet ligt in verhouding staat tot de informatie die gewonnen wordt.

3.7 UITBIJTERS

3.7.1 ALGEMEEN

Uitbijters zijn meetwaarden die niet in het 'patroon' van de overige meetwaarden passen. Het zijn meestal uitzonderlijk hoge of lage waarden. Uitbijters kunnen ontstaan door praktische fouten zoals fouten bij de monsternamen of bij de opslag van monsters, analysefouten, verschrijvingen (bijv. de decimale punt of komma staat op de verkeerde plaats) of fouten bij de invoer. Uitbijters kunnen ook ontstaan ten gevolge van niet representatief meten, dat wil zeggen dat op het moment van meten de situatie niet zo is als gewoonlijk. Niet representatieve situaties kunnen ontstaan door incidentele (illegale) lozingen of overstorten, uitzonderlijke neerslag of af- en uitspoeling of door monsternamen op een ander dagdeel dan gebruikelijk (o.a. belangrijk voor zuurstof, stikstof, pH en biologische variabelen). Uitbijters in de dataset leiden ertoe dat de spreiding of variantie in de dataset overschat wordt.

Indien uitbijters in de dataset worden aangetroffen en de correcte meetwaarde niet kan worden achterhaald, dient besloten te worden wat er mee te doen:

- uitbijters uit de dataset te verwijderen;
- een meer robuuste toets te gebruiken, die minder gevoelig is voor de aanwezigheid van uitbijters;
- andere alternatieven bijvoorbeeld vervangen door gemiddelde van vorige en volgende meetwaarde, of langjarig periodegemiddelde in geval van periodiciteit.

Welke van de hierboven genoemde methoden de beste is om op een bepaalde dataset toe te passen, blijft een kwestie van *expert opinion*.

Met behulp van Box-en-Whiskerplots kan de aanwezigheid van uitbijters worden gevisualiseerd. De aanwezigheid van uitbijters kan worden aangetoond met behulp van Rosner's toets. Deze toets wordt in de volgende paragrafen toegelicht.

3.7.2 ROSNER'S TOETS

3.7.2.1 INLEIDING

Met behulp van Rosner's toets kan de aanwezigheid van maximaal 10 uitbijters worden getoetst. Met deze toets is het tevens mogelijk om de aanwezigheid van twee of meer in waarde dicht bij elkaar liggende uitbijters te detecteren.

3.7.2.2 TOEPASBAARHEID EN BIJZONDERHEDEN

Rosner's toets veronderstelt dat (het hoofddeel van) de dataset normaal verdeeld is. Wanneer er sprake is van een lognormale verdeling, dan dienen de data logaritmisch getransformeerd te worden ($\ln(x)$) voordat de toets wordt uitgevoerd. Rosner's toets kan worden uitgevoerd wanneer de dataset tenminste 25 meetwaarden bevat. Is het aantal meetwaarden kleiner dan 25, dan wordt een toets voor het toetsen van uitbijters volgens Dixon (1953) aanbevolen (Gilbert, 1987).

Rosner's toets wordt in het algemeen uitgevoerd op een dataset waaruit alle bekende bronnen van variantie zijn verwijderd. Voor deze toets zijn dit (stap)trend en seizoensinvloeden. Een trendvrije, periodiciteitsvrije en uitbijtervrije subset van de meetreeks wordt vervolgens getoetst op normaliteit (§ 4.2) en afhankelijkheid (§ 4.4.1). Raadpleeg de bijlage 'Statistiek in de praktijk' (deel 1) wanneer blijkt dat deze subset niet-normaal verdeeld is of afhankelijkheid vertoont.

Voor de uitvoering van de Rosner's toets worden de volgende randvoorwaarden aan de meetreeks gesteld:

- de dataset (zonder uitbijters) is normaal verdeeld;
- de waarnemingen in de dataset (zonder uitbijters) zijn onderling onafhankelijk;
- het aantal meetwaarden is groter dan 25 ($N > 25$).

3.7.2.3 HYPOTHESE

Met de Rosner's toets worden de volgende hypothesen getoetst:

H_0 : De dataset bevat geen uitbijters;

H_A : De dataset bevat (k) uitbijters.

3.7.2.4 TOETSINGSGROOTHEID EN FORMULES

Voor het uitvoeren van Rosner's toets worden de onderstaande formules gebruikt:

$$\bar{X}^{(i)} = \frac{1}{N-i} \sum_{j=1}^{n-i} x_j \quad (12)$$

$$s^{(i)} = \sqrt{\frac{1}{N-i} \sum_{j=1}^{n-i} (x_j - \bar{X}^{(i)})^2} \quad (13)$$

$$R_{i+1} = \frac{|x_j^{(i)} - \bar{X}^{(i)}|}{s^{(i)}} \quad (14)$$

Hierin is:

R_{i+1}	toetsingsgrootheid van de Rosner's toets voor de aanwezigheid van $i+1$ uitbijters
$\bar{X}^{(i)}$	gemiddelde van de dataset nadat i uitbijters zijn verwijderd
$s^{(i)}$	standaarddeviatie van de dataset nadat i uitbijters zijn verwijderd
x_j	meetwaarde (met volgnummer j)
$x_j^{(i)}$	de meetwaarde met het grootste verschil ten opzichte van het gemiddelde $\bar{X}^{(i)}$ in de dataset waarvan i meest extreme meetwaarden zijn verwijderd
N	totaal aantal meetwaarden
i	indexnummer voor het aantal uit de dataset verwijderde uitbijters

In bijlage 5 kunnen de kritieke waarden $\lambda_{(i+1)}$ voor de Rosner's toets worden opgezocht. Bij een onbetrouwbaarheidsniveau α zijn er i uitbijters in de dataset aanwezig, wanneer $R_{(i+1)} \geq \lambda_{(i+1)}$. De hypothese H_0 wordt dan verworpen.

3.7.2.5 STAPPENPLAN UITVOERING TOETS

Stap 1:	Maak een trend-, periodiciteits- en uitbijtervrije subset van de dataset volgens respectievelijk § 3.12, § 3.11 en § 3.7.
Stap 2:	Toets deze subset op normaliteit (§ 4.2) en afhankelijkheid (§ 4.4.1) en ga verder met stap 3 wanneer voor beide toetsen de H_0 -hypothese wordt geaccepteerd.
Stap 3:	Het maximale aantal uitbijters, dat (indien aanwezig) uit de dataset verwijderd dient te worden, wordt aangeduid met de index k . Het indexnummer i is het aantal uit de dataset verwijderde uitbijters: $0 < i \leq k$.
Stap 4:	Nadat i uitbijters uit de dataset verwijderd zijn worden $\bar{X}^{(i)}$, $s^{(i)}$ en R_{i+1} berekend met behulp van de formules (12), (13) en (14), waarbij $x_j^{(i)}$ de meest extreme waarde is ten opzichte van het gemiddelde $\bar{X}^{(i)}$.
Stap 5:	De hypothese H_0 wordt met een onbetrouwbaarheidsniveau α verworpen wanneer $R_{i+1} \geq \lambda_{i+1}$.
Stap 6:	Herhaal stap 2 en 3 voor $0 < i \leq k$ uitbijters.

3.7.2.6 REKENVOORBEELD (CASE)

De uitvoering van Rosner's toets wordt met het hierna volgende voorbeeld toegelicht. In het onderstaande voorbeeld wordt het maximaal aantal aan te tonen uitbijters vastgesteld op 3 uitbijters. Wanneer geen uitbijters verwijderd ($i=0$) zijn, wordt getoetst op de aanwezigheid van 1 uitbijter in de dataset. Als vervolgens 1 uitbijter verwijderd is ($i=1$), wordt getoetst op de aanwezigheid van een 2^e uitbijter. Na verwijdering van 2 uitbijters ($i=2$) wordt getoetst op de eerst volgende (hier de derde) uitbijter. In dit voorbeeld wordt de toets uitgevoerd totdat 2 uitbijters ($i=2$) verwijderd zijn.

Tabel 3-1: Dataset

2.56	3.43	3.50	3.69	3.76	3.95	4.04	4.09	4.23	4.33	4.48
3.18	3.43	3.58	3.69	3.81	3.97	4.04	4.17	4.26	4.33	4.48
3.33	3.43	3.58	3.71	3.83	3.99	4.04	4.17	4.29	4.34	4.62
3.33	3.50	3.64	3.74	3.91	4.03	4.06	4.17	4.32	4.44	4.68
3.40	3.50	3.64	3.76	3.91	4.04	4.08	4.23	4.32	4.47	5.16

Tabel 3-2: Resultaten Rosner's toets

i	N-i	$\bar{X}^{(i)}$	$s^{(i)}$	$x_j^{(i)}$	R_{i+1}	λ_{i+1} ($\alpha=0.05$)
0	55	3.94	0.444	2.56	3.11	3.165
1	54	3.96	0.406	5.16	2.96	3.155
2	53	3.94	0.374	4.68	1.98	3.150

Met behulp van de formules in § 3.7.2.4 en het stappenplan in § 3.7.2.5 worden voor elke verwijderde uitbijter i de kengetallen voor de toets berekend. Deze kengetallen zijn weergegeven in tabel 3-2. Bij $i=0$ zijn geen uitbijters uit de dataset verwijderd. In deze situatie is 2.56 de meest extreme waarde ten opzichte van het gemiddelde $\bar{X}^{(i=0)}$ (=3.94). Wanneer de 1^e en grootste uitbijter (de meetwaarde 2.56) verwijderd is ($i=1$), en de toets wordt opnieuw uitgevoerd, dan wordt 5.16 de meest extreme meetwaarde ten opzichte van het nieuwe gemiddelde $\bar{X}^{(i=1)}$ (=3.96). Wanneer de 2 grootste uitbijters (de meetwaarden 2.56 en 5.16) uit de dataset verwijderd worden ($i=2$), dan wordt 4.68 de meeste extreme waarde ten opzichte van $\bar{X}^{(i=2)}$ (=3.96).

De kritieke waarden λ_{i+1} zijn door extrapolatie uit de tabel voor kritieke waarden voor de Rosner's toets (bijlage 5) verkregen voor $n=50$ en $n=60$ bij een onbetrouwbaarheidsniveau van $\alpha=0.05$.

De hypothese H_0 wordt voor iedere i getest. Bij $i=2$ (2 uitbijters verwijderd) blijkt de toetsingsgrootheid $R_{i+1}=1.98$ kleiner te zijn dan de kritieke waarde $\lambda_{i+1}=3.150$. De H_0 -hypothese wordt niet verworpen: de aanwezigheid van 3 uitbijters in de dataset kan niet worden aangetoond. Bij $i=1$ (1 uitbijter verwijderd) blijkt de toetsingsgrootheid $R_{i+1}=2.96$ kleiner te zijn dan de kritieke waarde $\lambda_{i+1}=3.155$. De H_0 -hypothese wordt niet verworpen, de aanwezigheid van 2 uitbijters in de dataset kan evenmin worden aangetoond. Ook de aanwezigheid van 1 uitbijter ($i=0$) kan niet worden aangetoond ($R_{i+1}=3.11$ versus $\lambda_{i+1}=3.165$). De eindconclusie is dat geen uitbijters kunnen worden aangetoond: de H_0 -hypothese wordt geaccepteerd.

3.8 NIET-EQUIDISTANTE TIJDREEKSEN EN ONTBREKENDE GEGEVENS

Een veel voorkomend verschijnsel bij data-analyse is dat gegevens ontbreken en dat zij niet gelijkmatig in de tijd (equidistant) verdeeld zijn. Sommige bewerkingen en toetsen kunnen in dergelijke gevallen niet uitgevoerd worden.

Meetreeksen worden in de praktijk equidistant in de tijd gemaakt door middel van een van de hierna volgende methoden:

1. De gegevens in een periode (week, maand, kwartaal) worden vervangen door het gemiddelde van de gegevens.
2. De gegevens in een periode (week, maand, kwartaal) worden vervangen door de mediaan van de gegevens.
3. De gegevens in een periode (week, maand, kwartaal) worden vervangen door het centroïd van de gegevens. Het centroïd is het getal dat het dichtst bij de middelste datum van de periode ligt.
4. Er worden 'nieuwe' gegevens gegeneerd op equidistante dagen door middel van lineaire interpolatie. Deze methode veronderstelt dat de lineaire interpolatie tussen twee metingen de beste benadering is van de werkelijke processen. Als er sprake is van seizoensinvloed worden missende pieken of dalen per definitie te laag, respectievelijk te hoog geschat. Hiervoor kan eventueel gecorrigeerd worden.

De meest gebruikelijke methode is (1). Door middeling verandert echter de statistische structuur van de data: dit betekent dat statistische kengetallen die berekend worden op basis van een periode gemiddelde meetreeks afwijken van de kengetallen die gelden voor de originele data. Als het aantal waarnemingen dat gemiddeld moet worden erg hoog is, dient overwogen te worden het aantal perioden per jaar te verhogen, bijvoorbeeld door de data in plaats van per kwartaal per maand te analyseren of methode (3) toe te passen.

De bovenstaande methoden zijn ook geschikt om het probleem van ontbrekende metingen op te lossen. Door de periode waarover geaggregeerd wordt te vergroten zijn uiteindelijk minder data beschikbaar, maar zullen ook minder of geen ontbrekende gegevens resterende. Het dalende aantal metingen zal bij het gebruik van gemiddelden of medianen samengaan met een daling van de spreiding in de data. Om een daling van het aantal metingen te voorkomen kan ook de lineaire interpolatie methode (4.) toegepast worden.

3.9 SIGNUMFUNCTIE

De signumfunctie is een belangrijke functie bij het gebruik van verdelingsvrije methoden. Het principe van de signumfunctie is dat aan het verschil tussen twee (gepaarde) meetwaarden een waarde wordt toegekend. De functie neemt, afhankelijk van het teken van het verschil, drie waarden aan:

$$\text{sgn}(x) = \begin{cases} 1 & \text{als } x > 0 \\ 0 & \text{als } x = 0 \\ -1 & \text{als } x < 0 \end{cases}$$

3.10 RANGORDES TOEKENNEN ('RANKEN')

Bij verdelingsvrije analysemethoden wordt geen gebruik gemaakt van de originele meetwaarden maar van rangnummers.

Rangnummers worden als volgt bepaald:

Stap 1. Corrigeer de waarnemingen (N) voor (verschillen in) detectielimieten (§ 3.6).

Stap 2. Sorteert de waarnemingen in oplopende volgorde.

Stap 3. Ken aan de waarnemingen rangnummers toe. Het rangnummer is de positie van een waarneming in de oplopende dataset. De laagste waarneming krijgt het rangnummer 1, de op een na laagste 2, etc. Bij gelijke waarnemingen wordt het gemiddelde rangnummer toegekend.

In de vorm van een formule is het toe te kennen rangnummer:

$$R = \left[N + 1 + \sum_{i=1}^N \text{sgn}(x_i - x) \right] / 2$$

De Σ -term geeft niets anders aan dan het aantal rangnummers afstand van het gemiddelde rangnummer.

Stap 4. Herstel de originele volgorde van de waarnemingen.

3.11 VERWIJDEREN SEIZOENSINVLOED

3.11.1 INLEIDING

De aanwezigheid van seizoensinvloeden in een meetreeks veroorzaakt extra spreiding in de gegevens. De aanwezigheid van seizoensinvloeden, de belangrijkste vorm van periodiciteit in waterkwaliteitsgegevens, kan worden vastgesteld met behulp van de non-parametrische Kruskal-Wallis toets (§ 4.1.1.1). Indien de data per seizoen normaal verdeeld zijn is de parametrische één-factor ANOVA (§ 4.1.2) toepasbaar.

De meest voorkomende methode om de seizoensinvloed uit waterkwaliteitsgegevens te verwijderen, is het aftrekken van het seizoensgemiddelde (§ 3.1) over een seizoen van elke individuele waarde van dit seizoen. Omdat deze methode gebruikt maakt van het gemiddelde, is zij gevoelig voor uitbijters, met name indien slechts een gering aantal metingen per seizoen beschikbaar is. Op theoretische gronden is het daarom raadzaam om in plaats van het seizoensgemiddelde de seizoensmediaan (§ 3.2) te gebruiken. Dit heeft als bijkomend voordeel dat na verwijdering van de seizoensinvloed een eventuele uitbijter makkelijker detecteerbaar is met behulp van de Rosner's toets (§ 3.7.3). Indien gebruik gemaakt wordt van het gemiddelde, wordt de kans om uitbijters te detecteren kleiner, aangezien de uitbijters hierbij gecamoufleerd worden.

Bij het verwijderen van de seizoensinvloed wordt er in het algemeen van uitgegaan dat alle seizoenen van elkaar verschillen. De toetsen op periodiciteit (§ 4.1) geven echter alleen aan dat er tenminste één periode afwijkt van het algemene beeld. De voor iedere periode individuele correctie is daardoor aan de grove kant. Het is echter aannemelijk dat in elke periode seizoensinvloed aanwezig is, ook al is deze niet statistisch aantoonbaar. Seizoenscorrecties worden daarom veelal toegepast ondanks een gebrek aan een statische significante seizoensinvloed.

3.11.2 REKENVOORBEELD (CASE)

Case: Verwijderen seizoensinvloed

Data: Bergsche Achterplas, totaalfosfaat van 29-11-85 t/m 21-02-90; zie ook § 7.1.6 (case t-toets op verschil in gemiddelden).

In de data is seizoensinvloed aangetoond (Kruskal-Wallis bij $\alpha=0.05$). De seizoensinvloed dient verwijderd te worden. De originele en seizoensvrije data zijn weergegeven in Tabel 3-3.

Tabel 3-3: Verwijderen seizoensinvloed in dataset

Seizoen 1		seizoen 2		seizoen 3		seizoen 4	
originele data							
29-11-85	1.500	4-03-86		4-06-86	1.400	3-09-86	0.940
6-01-86	0.780	3-04-86	0.560	3-07-86	1.100	1-10-86	1.100
4-02-86	0.540	14-05-86	0.360	4-08-86	0.940	3-11-86	0.840
4-12-86	1.000	5-03-87	0.380	3-06-87	1.100	4-09-87	0.620
5-01-87	0.380	2-04-87	0.320	2-07-87	0.920	5-10-87	0.580
3-02-87	0.280	6-05-87	0.180	5-08-87	0.500	6-11-87	0.680
3-12-87	0.400	2-03-88	0.340	8-06-88	0.580	5-09-88	0.580
4-01-88	0.440	5-04-88	0.400	5-07-88	0.600	6-10-88	0.840
1-02-88	0.400	2-05-88	0.940	5-08-88	0.660	2-11-88	0.420
1-12-88	0.320	30-03-89	0.480	29-06-89	0.540	28-09-89	0.620
30-01-89	0.400	28-04-89	0.500	3-08-89	0.420	30-10-89	0.580
27-02-89	0.240	31-05-89	0.460	30-08-89	0.480	30-11-89	0.260
21-12-89	0.300	26-03-90	0.420	28-06-90	0.520	20-09-90	0.440
29-01-90	0.260	26-04-90	0.480	26-07-90	0.500	22-10-90	0.620
21-02-90	0.280	30-05-90	0.460	22-08-90	0.480	26-11-90	0.240
seizoens gemiddelde	0.501		0.461		0.716		0.624
seizoensinvloedvrije data							
29-11-85	0.999	4-03-86	0.179	4-06-86	0.684	3-09-86	0.316
6-01-86	0.279	3-04-86	0.099	3-07-86	0.384	1-10-86	0.476
4-02-86	0.039	14-05-86	-0.101	4-08-86	0.224	3-11-86	0.216
4-12-86	0.499	5-03-87	-0.081	3-06-87	0.384	4-09-87	-0.004
5-01-87	-0.121	2-04-87	-0.141	2-07-87	0.204	5-10-87	-0.044
3-02-87	-0.221	6-05-87	-0.281	5-08-87	-0.216	6-11-87	0.056
3-12-87	-0.101	2-03-88	-0.121	8-06-88	-0.136	5-09-88	-0.044
4-01-88	-0.061	5-04-88	-0.061	5-07-88	-0.116	6-10-88	0.216
1-02-88	-0.101	2-05-88	0.479	5-08-88	-0.056	2-11-88	-0.204
1-12-88	-0.181	30-03-89	0.019	29-06-89	-0.176	28-09-89	-0.004
30-01-89	-0.101	28-04-89	0.039	3-08-89	-0.296	30-10-89	-0.044
27-02-89	-0.261	31-05-89	-0.001	30-08-89	-0.236	30-11-89	-0.364
21-12-89	-0.201	26-03-90	-0.041	28-06-90	-0.196	20-09-90	-0.184
29-01-90	-0.241	26-04-90	0.019	26-07-90	-0.216	22-10-90	-0.004
21-02-90	-0.221	30-05-90	-0.001	22-08-90	-0.236	26-11-90	-0.384
seizoens gemiddelde	0.000		0.000		0.000		0.000

3.12 VERWIJDEREN TREND

Evenals seizoensinvloeden leidt de aanwezigheid van trend in een dataset tot een grotere spreiding. Bovendien veroorzaakt de trend een onderlinge afhankelijkheid van de gegevens. Indien de trend verwijderd wordt nemen spreiding en onderlinge afhankelijkheid af en worden de mogelijkheden om hypothesen statistisch te toetsen groter. Een ander argument om de trend te verwijderen is de invloed van de aanwezigheid van trend op de schatting van andere statistische kengetallen zoals bijvoorbeeld de periodiciteit.

In het algemeen kan de aanwezigheid van een historische trend op eenvoudige wijze worden vastgesteld met behulp van lineaire regressie. Met een Student's t-toets kan worden aangetoond of deze trend significant is (de richtingscoëfficiënt wijkt dan significant af van nul). De uitkomst van de t-toets kan echter misleidend zijn, wanneer de meetreeksen seizoensinvloeden vertonen, de meetgegevens niet-normaal verdeeld zijn of wanneer er sprake is van onderlinge afhankelijkheid⁶. In deze gevallen wordt normaliter geadviseerd om non-parametrische toetsen toe te passen. Een voorbeeld hiervan is de Seasonal Kendall toets die wordt gebruikt om een historische trend aan te tonen in een meetreeks met seizoensinvloeden (Gilbert, 1987).

Een dataset waarin trend aanwezig is en die niet-normaal verdeeld is, kan met behulp van de volgende methode trendvrij worden gemaakt. De uitgangspunten van deze methode zijn:

- de trend (tr) is bekend (eenheden per tijdseenheden t) of wordt geschat met behulp van bijvoorbeeld de Seasonal Kendall Slope Estimator;
- het gemiddelde van de data mag niet veranderen.

Voor het verwijderen van de trend worden de onderstaande formules gebruikt:

$$\text{gemiddeld trend effect} = \frac{1}{N} \sum_{t=1}^N tr \times t \quad (15)$$

$$y_t = x_t + \text{gemiddeld trend effect} - tr \times t \quad (16)$$

Hierin is:

N	aantal meetwaarden
tr	trend
x_t	meetwaarde op tijdstip t
y_t	de trendvrije meetwaarde op tijdstip t

Het verwijderen van de trend wordt op de hierna volgende wijze uitgevoerd:

- Stap 1. Bereken de grootte van de trend met behulp van de Sen Slope Estimator (§ 6.2) als geen seizoensinvloeden aanwezig zijn in de dataset en met behulp van de Seasonal Kendall Slope Estimator (§ 6.3) als er wel seizoensinvloeden aanwezig zijn.
- Stap 2. Bereken het effect van de trend voor elk tijdstip, ervan uitgaande dat op tijdstip 0 het effect 0 is. Tel alle effecten bij elkaar op en deel dit door het aantal waarnemingen. Het resultaat is het gemiddelde trend effect (formule (15)).
- Stap 3. Bereken de nieuwe datareeks y_t met behulp van formule (16).

⁶ Een andere veel gebruikte term voor onderlinge afhankelijkheid tussen monsters is seriële autocorrelatie of hardnekkige correlatie. Seriële correlatie is de autocorrelatie die resteert na verwijdering van de bekende bronnen van variantie zoals bijvoorbeeld trend en seizoensinvloeden.

3.13 RESIDUEN

De aanwezigheid van trend en seizoensinvloeden in een dataset vergroot in het algemeen de variantie (§ 3.3) en de mate van autocorrelatie (§ 4.4.2) in die dataset. Voor de berekening van de autocorrelatiecoëfficiënten dient een dataset tevens equidistant te zijn. De aanwezigheid van uitbijters leidt in de regel tot een grotere variantie.

Voor bewerkingen en/of toetsen, waarbij de grootte van de variantie of de autocorrelatie een rol speelt, bijvoorbeeld bij het bepalen van het effectieve aantal metingen (§ 4.4.4), dienen de genoemde effecten verwijderd te worden voordat deze statistische grootheden worden berekend. Met dit doel wordt een zogenaamde residuenreeks gegenereerd. De te verwijderen storende effecten en de volgorde waarin dit dient plaats te vinden, is weergegeven in het hierna volgende stappenplan.

- Stap 1: Verwijder de uitbijters uit de ruwe data (o.a. § 3.7.3). Voor langjarige trends zijn extreme unieke waarden niet interessant, ook al zijn de concentraties werkelijk gemeten.
- Stap 2: Maak de meetreeks equidistant volgens de in § 3.8 aangegeven methode.⁷
- Stap 3: Bereken het gemiddelde (§ 3.1) en/of de mediaan (§ 3.2) over enkele (1-3) recente jaren. Houd hierbij rekening met seizoensinvloed door bijvoorbeeld eerst per seizoen (maand) gemiddelden te berekenen. In elk seizoen moet een waarde beschikbaar zijn.
- Stap 4: Bereken de grootte van de trend met behulp van de Seasonal Kendall Slope Estimator (§ 6.3).
- Stap 5: Verwijder de trend volgens de in § 0 beschreven methode.
- Stap 6: Verwijder de seizoensinvloed volgens de in § 3.11 aangegeven methode.
- Stap 7: Bepaal of de variantie in de tijd verandert (§ 4.3.1).
- Stap 8: Bereken de variantie s^2 (§ 3.3) over de gehele periode als er geen aanwijzingen zijn over variërende varianties in de tijd. Indien dit wel zo is, bepaal de variantie dan alleen over een recente periode.
- Stap 9: Bereken de lag(1)-correlatiecoëfficiënt volgens § 4.4.2.

⁷ Stap 2 is gangbaar maar alleen noodzakelijk op het moment dat de autocorrelatiecoëfficiënten berekend moeten worden. Aangezien het steeds weer rekening houden met verschillen in aantallen metingen per seizoen de bewerkingen bemoeilijkt wordt de meetreeks a priori per seizoen jaargemiddeld. Hiermee wordt voor lief genomen dat de spreiding onderschat wordt. In de praktijk is het aan te bevelen het aantal seizoenen en de datumgrenzen tussen seizoenen zodanig vast te stellen dat zo min mogelijk seizoenen meer dan een meting hebben.

4 ALGEMENE ANALYSES

Zoals in § 2.4 is uiteengezet, kunnen statistische toetsen in het algemeen onderverdeeld worden in verdelingsvrije en geparameteriseerde methoden. Geparameteriseerde methoden zijn meestal gebaseerd op de (standaard) normale verdeling. Voldoet een meetreeks aan geen enkele verdeling dan worden verdelingsvrije, ook wel verdelingsvrije toetsen gebruikt.

Meetreeksen van waterkwaliteitsvariabelen zijn meestal niet-normaal verdeeld. Om deze reden wordt voor de statistische verwerking van waterkwaliteitsgegevens waar mogelijk gebruik gemaakt van verdelingsvrije methoden, aangezien deze zogenaamd robuust zijn. Daarentegen zijn de geparameteriseerde toetsen gevoeliger voor het toetsen van hypothesen.

In dit hoofdstuk wordt een aantal analyse methoden toegelicht die gericht zijn op het toetsen in welke mate een meetreeks voldoet aan de (standaard) normale verdeling. De belangrijkste aspecten die tot gevolg hebben dat een meetreeks niet aan een normale verdeling voldoen zijn periodiciteit (seizoensinvloed), de vorm van de verdeling van de meetreeks (normaliteit), homogeniteit van de variantie en onderlinge afhankelijkheid van meetwaarden.

4.1 ANALYSES PERIODICITEIT (SEIZOENSINVLOED)

Periodiciteit is een verzamelbegrip voor processen die zich min of meer, maar wel in vaste tijdsintervallen herhalen. Dagelijkse cycli in de zuurstofconcentratie, wekelijkse cycli in de (industriële) afvalwaterproductie, jaarlijkse cycli in de debieten zijn alle voorbeelden van periodiciteit. Kenmerkend voor variabelen die onder invloed staan van periodiciteit is dus dat de uitkomst van een meting afhangt van het tijdstip van deze meting.

Seizoensinvloed is een bijzondere vorm van periodiciteit: het betreft hier namelijk op jaarbasis wederkerende omstandigheden. Behalve directe natuurlijke seizoeninvloed, ten gevolge van de door de positie van de aarde ten opzichte van de zon, kan er eveneens sprake zijn van door mensen geïnduceerde seizoeninvloed, bijvoorbeeld het mestbeleid en het peilbeheer (de landbouw wordt indirect door de natuurlijke seizoeninvloed bepaald).

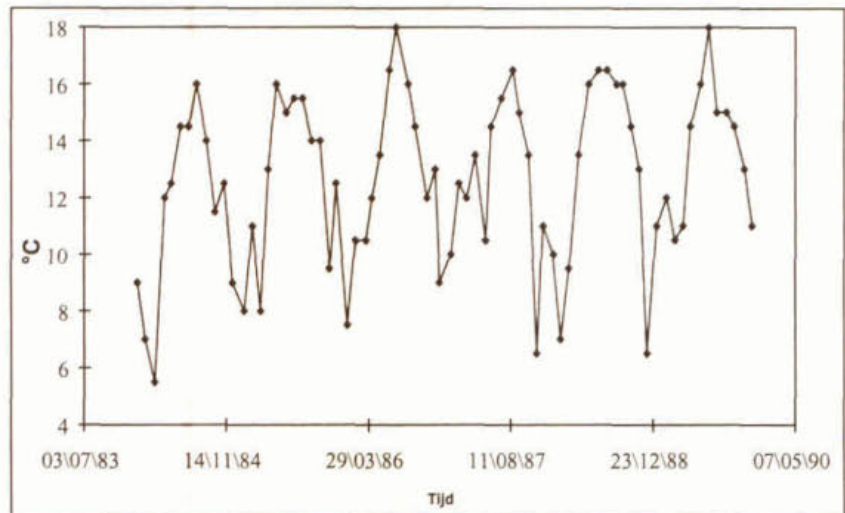
Seizoensinvloed op de afvoer heeft in het algemeen seizoeninvloed op de zwevende stofconcentratie tot gevolg indien opwerveling en sedimentatie belangrijke processen in het systeem zijn. Dit betekent dat alle variabelen, die een verband met zwevende stof vertonen, eveneens seizoeninvloed vertonen.

Anders dan algemeen gangbaar staat het aantal seizoenen bij de data-analyse niet per definitie vast. Bij maandelijkse metingen wordt uitgegaan van 12 seizoenen, terwijl in het dagelijkse bestaan vier seizoenen gangbaar zijn. Aangezien de overgang tussen veel seizoenen gradueel verloopt is er veel te zeggen voor het werken met 12 seizoenen als maandelijkse metingen worden uitgevoerd. Indien bij de analyse van vier seizoenen (kwartalen) uitgegaan wordt (en per seizoen meerdere gegevens beschikbaar zijn), moet aandacht aan de definitie van de kwartalen besteed worden. In de praktijk begint het eerste kwartaal meestal op 1 januari. Op grond van de seizoeninvloed kan echter een kwartaal indeling beginnend in december een duidelijker beeld van de seizoeninvloed schetsen.

Evenals de trend vergroot de periodiciteit de variantie en veroorzaakt onderlinge afhankelijkheid van de meetgegevens. Periodiciteit in waterkwaliteitsgegevens is eerder regel dan uitzondering (Ward et al., 1990). Door de periodiciteit te verwijderen daalt de spreiding en de onderlinge

afhankelijkheid waardoor de mogelijkheden tot het statistisch toetsen van hypothesen groter worden. Het verwijderen van de periodiciteit is nader toegelicht in § 3.11.

De Kruskal-Wallis toets is een verdelingsvrije methode om periodiciteit in een dataset aan te tonen. Deze toets wordt toegelicht in § 4.1.1.1. De geparameteriseerde tegenhanger van de Kruskal-Wallis toets is de één-factor analyse van de variantie (ANOVA; § 4.1.2). De toetsen op periodiciteit dienen op een trendvrije (sub)meetreeks te worden uitgevoerd. De toetsen op periodiciteit zijn onafhankelijk van de vorm van de periodiciteit: er wordt alleen onderzocht of één of meerdere perioden (seizoenen) afwijken van het gemiddelde van alle seizoenen. Visualisatie van de periodiciteit geschiedt in het algemeen met behulp van zogenaamde Box-Whisker-Plots.



Figuur 4-1: Periodiciteit in een meetreeks

4.1.1 KRUSKAL-WALLIS TOETS

4.1.1.1 INLEIDING

Als een waterkwaliteitsvariabele in een bepaalde periode van het jaar systematisch afwijkt van de gemiddelde waterkwaliteit in het jaar, is er sprake van periodiciteit of seizoensinvloed. De aanwezigheid van periodiciteit in een dataset kan worden aangetoond met behulp van de verdelingsvrije Kruskal-Wallis toets.

4.1.1.2 TOEPASBAARHEID EN BIJZONDERHEDEN

Met de Kruskal-Wallis toets wordt alleen onderzocht of tenminste één periode (seizoen) afwijkt van het gemiddelde beeld van alle seizoenen. Aangezien de toets verdelingsvrij is, kan de toets toegepast worden op data met onbekende (bijv. niet normale) verdelingen. De gegevens binnen de perioden (seizoenen) moeten onafhankelijk van elkaar zijn.

De Kruskal-Wallis toets wordt in het algemeen uitgevoerd op een dataset waaruit alle bekende bronnen van variantie zijn verwijderd. Voor deze toets is dat (stap)trend, maar niet seizoensinvloeden omdat deze toets juist hierop gericht is. Een trendvrije subset van de meetreeks wordt vervolgens getoetst op afhankelijkheid (§ 4.4.1). Raadpleeg de bijlage 'Statistiek in de praktijk' wanneer blijkt dat deze subset afhankelijkheid vertoont.

Randvoorwaarden:

- de meetwaarden binnen de seizoenen zijn onderling onafhankelijk.

4.1.1.3 HYPOTHESE

Met de Kruskal-Wallis toets wordt de aanwezigheid van periodiciteit getoetst met behulp van de hypothese:

H_0 : Alle perioden (seizoenen) hebben dezelfde mediaan;

H_A : Tenminste één periode (seizoen) heeft een afwijkende mediaan.

4.1.1.4 TOETSINGSGROOTHEID, FORMULES EN KRITIEKE WAARDEN

De toetsingsgrootheid K_w voor de Kruskal-Wallis toets wordt op de hierna volgende wijze berekend:

$$K_w = \left[\frac{12}{N(N+1)} \sum_{s=1}^P \frac{R_s^2}{n_s} \right] - 3(N+1) \quad (17)$$

$$K_w' = \frac{K_w}{\left[1 - \left(\frac{1}{N(N^2-1)} \sum_{j=1}^g t_j(t_j^2-1) \right) \right]} \quad (18)$$

Hierin is:

K_w en K_w'	toetsingsgrootheden
N	totaal aantal meetwaarden van alle perioden (seizoenen)
n_s	aantal meetwaarden per periode (seizoen) s
s	indexnummer voor perioden (seizoenen)
P	totaal aantal perioden (seizoenen)
R_s	som van de rangnummers voor periode (seizoen) s
j	indexnummer voor aantal keren dat het zelfde rangnummer voorkomt
g	aantal keren dat het zelfde rangnummer voorkomt
t_j	aantal waarnemingen met hetzelfde rangnummer

K_w en K_w' volgen een Chi-kwadraatverdeling met $P-1$ vrijheidsgraden. De nulhypothese (H_0) wordt geaccepteerd wanneer K_w of $K_w' > \chi^2_{(a, P-1)}$. De kritieke waarden voor $\chi^2_{(a, P-1)}$ kunnen in een tabel met (rechter) overschrijdingskansen van de χ^2 -verdeling worden opgezocht (bijlage 4).

Voor situaties met geringe aantal perioden ($P < 6$) en geringe datasets per periode zijn exacte kritieke waarden bepaald (zie voor referenties Gilbert, 1987).

4.1.1.5 UITVOERING TOETS

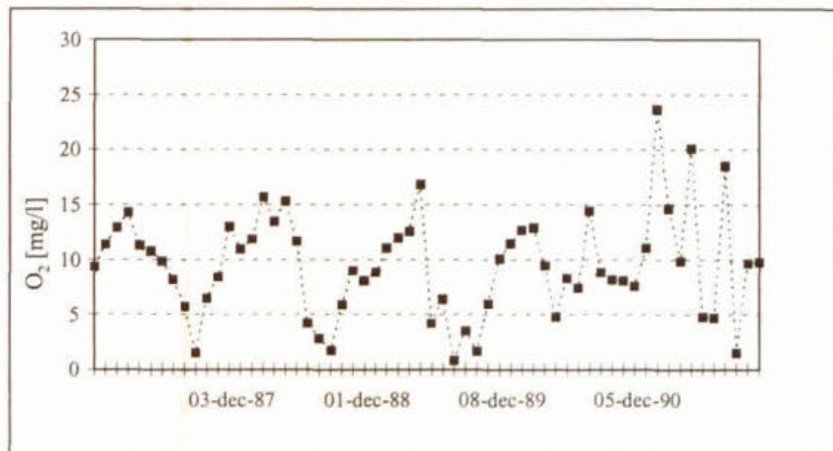
Stap 1:	Maak een trendvrije subset van de dataset volgens respectievelijk § 3.12.
Stap 2:	Toets deze subset op afhankelijkheid binnen de seizoenen (§ 4.4.1) en ga verder met stap 3 wanneer de H_0 -hypothese wordt geaccepteerd.
Stap 3:	Rank de meetgegevens in de dataset volgens § 3.10.
Stap 4:	Bereken voor elke periode (seizoen) de som R_s van de rangnummers.
Stap 5:	Sommeer alle R_s -waarden voor alle P perioden (seizoenen).
Stap 6:	Bepaal het aantal data (n_s) per periode p (seizoenen).
Stap 7:	Bereken de toetsingsgrootheid K_w volgens formule (17). Als elke waarneming uniek is (er zijn géén gemiddelde rangnummers toegekend) ga naar stap 10.

- Stap 8:** Tel het aantal keren (g) dat een rangnummer meervoudig is toegekend en bepaal het aantal keren t_j dat deze rangnummers zijn toegekend. (Voorbeeld: toegekende rangnummers zijn: 1, 2.5, 2.5, 5, 5, 5; dan is $g=2$, $t_1(2.5)=2$, $t_2(5)=3$).
- Stap 9:** Bereken de gecorrigeerde toetsingsgrootte K_w' volgens formule (18).
- Stap 10:** Verwerp de hypothese H_0 als K_w of K_w' de kritieke waarde uit de χ^2 -kwadraat tabel (bijlage 4) overschrijdt .

4.1.1.6 REKENVOORBEELD (CASE)

Case: Zuurstof in Vaart Bleiswijk (1987 - 1991)

Het zuurstofgehalte in Vaart Bleiswijk varieert sterk gedurende het jaar. Met de Kruskal-Wallis toets wordt de aanwezigheid van seizoensperiodiek getoetst. De beschikbare gegevens zijn grafisch weergegeven in Figuur 4-2 en de hierbij behorende meetwaarden in Tabel 4-1.



Stap 1-6: Zie Tabel 4-1

Figuur 4-2: Zuurstof Vaart Bleiswijk 1987 - 1991

Tabel 4-1: (Tussen)resultaten stap 1 tot en met 6

Winter			voorjaar			zomer			najaar		
datum	O ₂	R	datum	O ₂	R	datum	O ₂	R	datum	O ₂	R
04-dec-86	9.4	29	05-mrt-87	14.3	52	03-jun-87	9.9	33.5	04-sep-87	1.5	2.5
05-jan-87	11.4	41	02-apr-87	11.3	40	02-jul-87	8.2	22.5	05-okt-87	6.5	17
05-feb-87	12.9	48.5	06-mei-87	10.8	36	05-aug-87	5.7	13	06-nov-87	8.4	25
03-dec-87	13	50	02-mrt-88	15.7	56	08-jun-88	11.7	43	05-sep-88	1.7	5
04-jan-88	11	37	05-apr-88	13.5	51	05-jul-88	4.2	8.5	06-okt-88	5.9	14
01-feb-88	11.9	44	02-mei-88	15.3	55	05-aug-88	2.8	6	02-nov-88	9	28
01-dec-88	8.1	20.5	07-mrt-89	12	45	07-jun-89	4.2	8.5	08-sep-89	3.5	7
10-jan-89	8.9	26.5	10-apr-89	12.6	46	07-jul-89	6.4	16	06-okt-89	1.6	4
09-feb-89	11.1	38.5	10-mei-89	16.8	57	07-aug-89	0.8	1	06-nov-89	6	15
08-dec-89	10.1	35	07-mrt-90	12.9	48.5	12-jun-90	8.3	24	10-sep-90	8.9	26.5
09-jan-90	11.5	42	05-apr-90	9.5	30	10-jul-90	7.4	18	10-okt-90	8.2	22.5
06-feb-90	12.7	47	07-mei-90	4.8	11.5	09-aug-90	14.4	53	07-nov-90	8.1	20.5
05-dec-90	7.6	19	05-mrt-91	14.7	54	10-jun-91	4.8	11.5	12-sep-91	1.5	2.5
09-jan-91	11.1	38.5	05-apr-91	9.9	33.5	10-jul-91	4.7	10	08-okt-91	9.7	31
05-feb-91	23.6	60	07-mei-91	20.1	59	09-aug-91	18.5	58	11-nov-91	9.8	32
n_s		15			15			15			15
R_s		576.5			674.5			326.5			252.5
											5

Stap 7: $K_w = [12/(60 \times 61)] \times [(576.5)^2/15 + (674.5)^2/15 + (326.5)^2/15 + (252.5)^2/15] - 3 \times 61 = 26.3$

Stap 8: $t_1(1.5)=2, 2 \times 3=6$ $t_2(4.2)=2, 2 \times 3=6$ $t_3(4.8)=2, 2 \times 3=6$
 $t_4(8.1)=2, 2 \times 3=6$ $t_5(8.2)=2, 2 \times 3=6$ $t_6(8.9)=2, 2 \times 3=6$
 $t_7(9.9)=2, 2 \times 3=6$ $t_8(11.1)=2, 2 \times 3=6$ $t_9(12.9)=2, 2 \times 3=6$
Totaal = 54

Stap 9: $K'_w = 29.3/[1 - (1/(60(60^2 - 1)))] \times 54 = 26.3$

Stap 10: $\alpha = 0.05$, aantal vrijheidsgraden = $P-1 = 3$,

Verwerp H_0 indien: K_W of $K'_W \leq 1 - \chi^2_{(1-\alpha/2, P-1)} \Rightarrow K_W$ of $K'_W \leq 9.348$

Resultaat

Verwerp H_0 : tenminste één seizoen heeft een afwijkend gemiddelde. Met een onbetrouwbaarheid van 5% is in deze voorbeeldsituatie statistisch aangetoond dat er sprake is van seizoensinvloed.

4.1.2 ÉÉN-FACTOR ANOVA

4.1.2.1 INLEIDING

De geparameteriseerde tegenhanger van de Kruskal-Wallis toets op periodiciteit is de één-factor analyse van de variantie (Anova).

4.1.2.2 TOEPASBAARHEID EN BIJZONDERHEDEN

De één-factor Anova wordt in het algemeen uitgevoerd op een dataset waaruit alle bekende bronnen van variantie zijn verwijderd. Voor deze toets is dit (stap)trend, maar niet seizoensinvloeden omdat deze toets juist hierop gericht is. Een trendvrije subset van de meetreeks wordt vervolgens per seizoen getoetst op normaliteit (§ 4.2), afhankelijkheid (§ 4.4.1) en homogeniteit van variantie (§ 4.3.1). Raadpleeg de bijlage 'Statistiek in de praktijk' wanneer blijkt dat deze subset niet-normaal verdeeld is of afhankelijkheid vertoont of wanneer de variantie niet homogeen is.

Voor de uitvoering van de variantie-analyse worden de volgende randvoorwaarden aan de data gesteld:

- de data in elk individueel seizoen zijn normaal verdeeld (of zijn normaal verdeeld na een geschikte transformatie);
- de variantie van elk seizoen is gelijk;
- de data in elk seizoen zijn onderling onafhankelijk.

4.1.2.3 HYPOTHESE

De hypothese en het alternatief voor de variantie-analyse luiden:

H_0 : geen periodiciteit aantoonbaar;

H_A : periodiciteit aantoonbaar aanwezig.

4.1.2.4 TOETSINGSGROOTHEID, FORMULES EN KRITIEKE WAARDEN

Eén-factor analyse van de variantie wordt volgens onderstaande formules uitgevoerd:

$$MST = \frac{\sum_{s=1}^P n_s (\bar{X}_s - \bar{X})^2}{P-1} \quad (19)$$

$$MSE = \frac{\sum_{s=1}^P \sum_{i=1}^{n_s} (x_{s,i} - \bar{X}_s)^2}{N - P} \quad (20)$$

$$F = \frac{MST}{MSE} \quad (21)$$

Hierin is:

F	toetsingsgrootheid
$\bar{X}_s$	gemiddelde van de meetwaarden voor periode (seizoen) s
$\bar{X}$	totale gemiddelde van alle meetwaarden
P	totaal aantal perioden (seizoenen)
N	totaal aantal meetwaarden van alle perioden (seizoenen)
n_s	aantal meetwaarden per periode (seizoen) s
s	indexnummer voor perioden (seizoenen)
i	indexnummer voor individuele meetwaarden

De toetsingsgrootheid F volgt de F -verdeling van Fisher met $(P-1)$ en $(N-P)$ vrijheidsgraden. De hypothese H_0 (geen periodiciteit) wordt geaccepteerd wanneer $F < F_{(P-1, N-P)}$ bij een onbetrouwbaarheidsniveau α . De kritieke waarde voor $F_{(P-1, N-P)}$ met een onbetrouwbaarheidsniveau α kan in een tabel voor (rechter) overschrijdingskansen van de F -verdeling van Fisher worden opgezocht.

4.1.2.5 UITVOERING TOETS

Stap 1:	Maak een trendvrije subset van de dataset volgens respectievelijk § 3.12.
Stap 2:	Toets deze subset op normaliteit (§ 4.2), afhankelijkheid (§ 4.4.1) en homogeniteit van variantie (§ 4.3.1) en ga verder met stap 3 wanneer voor deze toetsen de H_0 -hypothese wordt geaccepteerd.
Stap 3:	Bereken het totale gemiddelde en het gemiddelde voor elk van de P perioden (s) met aantal waarnemingen n_s .
Stap 4:	Bereken MST volgens formule (19).
Stap 5:	Bereken MSE volgens formule (20).
Stap 6:	De toetsingsgrootheid F is: $F = MST/MSE$ (formule (21)).
Stap 7:	Onder H_0 is F verdeeld volgens de F -verdeling met $(P-1)$ en $(N-P)$ vrijheidsgraden. Verwerp H_0 als F bij een onbetrouwbaarheid α de kritieke waarde van de F -verdeling overschrijdt.

4.2 ANALYSES NORMALITEIT

De meest gebruikte statistische verdeling is de normale verdeling. Deze verdeling wordt gekenmerkt door een vloeiende, symmetrische en klokvormige curve. De normale verdeling wordt beschreven door een functie waarin het populatiegemiddelde μ en de populatiestandaardafwijking σ de parameters zijn (hoofdstuk 2). Met μ en σ kan een groot aantal curven worden beschreven, die onderling verschillen door de vorm (wordt bepaald door σ) en door de ligging op de x-as (wordt bepaald door μ).

De meetwaarden van een meetreeks kunnen uitgezet worden in een cumulatieve distributieverdeling. Daartoe worden de meetwaarden ingedeeld in klassen. Van elke klasse wordt bepaald hoeveel meetwaarden daarin voorkomen. In een cumulatieve distributie verdeling worden de aantallen meetwaarden per klasse cumulatief uitgezet tegen de klassegrootte. Vervolgens kan worden getoetst of de aldus verkregen verdeling voldoet aan een van de bekende theoretische verdelingen (§ 2.1).

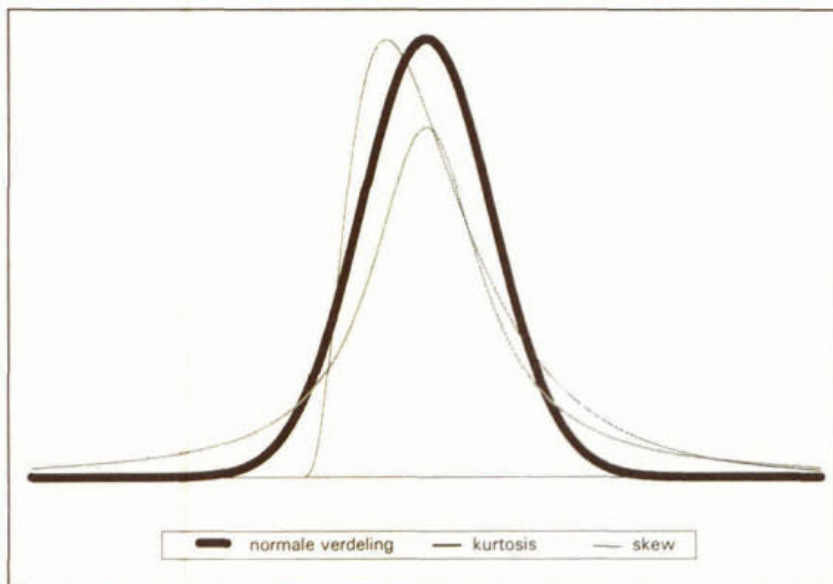
Met behulp van de Kolmogorov toets kan de verdeling van de meetwaarden worden getoetst met een aantal algemeen voorkomende theoretische verdelingen. Deze toets berekent het maximale verschil tussen de cumulatieve distributieverdeling van de theoretische verdeling en de cumulatieve verdeling van de dataset. Indien dit verschil de bij de gewenste betrouwbaarheid horende grenswaarde overschrijdt, voldoet de verdeling van de data in de meetreeks aan de verdeling van de geselecteerde theoretische verdeling. Omdat in de praktijk de normale verdeling de belangrijkste is, wordt in dit hoofdstuk een variant op de Kolmogorov toets toegelicht, namelijk de toets van Lilliefors. Deze toets evalueert de overeenkomst met de normale verdeling en wordt beschreven in § 4.2.1. Een alternatief voor de toets van Lilliefors is de toets van Shapiro-Wilk.

De vorm van een verdeling wordt symmetrisch genoemd als de mediaan en het gemiddelde samen vallen. De vorm van de verdeling is dan aan beide zijden van de mediaan hetzelfde. Als de vorm van de verdeling niet gespiegeld kan worden ten opzichte van de mediaan, dan is de verdeling asymmetrisch of scheef. De asymmetrie van een verdeling (*skew*) kan zich op twee manieren manifesteren:

1. De top ligt links van het midden en de verdeling heeft een lange uitloop naar rechts. In deze situatie zijn er dus meer lage meetwaarden dan hoge. Dit wordt een positieve *skew* genoemd. Voor een positieve *skew* geldt: $\text{modus} < \text{mediaan} < \text{gemiddelde}$. In figuur 4-3 is een verdeling met positieve *skew* weergegeven. De toets voor *skew* zal een negatieve waarde als resultaat hebben.
2. De top ligt rechts van het midden. Er zijn meer hoge meetwaarden dan lage. Dit wordt negatieve *skew* genoemd. Hiervoor geldt: $\text{gemiddelde} < \text{mediaan} < \text{modus}$. De toets voor *skew* geeft een positieve waarde als resultaat.

De mate van gepiekttheid is eveneens een eigenschap van een verdeling en wordt *kurtosis* genoemd. Een verdeling vertoont positieve *kurtosis* wanneer de vorm meer gepiekt is dan de normale verdeling. De toetswaarde is bij positieve *kurtosis* positief. In figuur 4-3 is een verdeling met positieve *kurtosis* weergegeven. Bij negatieve *kurtosis* is de verdeling minder gepiekt dan de normale verdeling. De toetswaarde is dan negatief.

De *skew* (scheefheid) en *kurtosis* (gepiektheid) zijn grootheden die de vorm van de normale verdeling beschrijven. De *skew* (en de significantie van de *skew* (normaliteit)) is een maat voor de asymmetrie van een verdeling. Een significante *skew* duidt erop dat de piek van de verdeling niet in het midden van de verdelingscurve is. Dit wijst op een niet normale verdeling van de gegevens (Ward et al., 1990). De *kurtosis* (en de significantie van de *kurtosis* (normaliteit)) beschrijft de gepiektheid of de platheid van een verdeling. Een significante *kurtosis* duidt op een te hoge of te lage piek in de verdeling van de gegevens. Dit wijst eveneens op een niet normale verdeling van de gegevens (Ward et al., 1990). De toetsen voor *skew* en *kurtosis* worden beschreven in respectievelijk § 4.2.3 en § 4.2.4.



Figuur 4-3: Karakteristieken van een normale verdeling

4.2.1 TOETS VAN LILLIEFORS

4.2.1.1 INLEIDING

Veel statistische toetsen zijn gebaseerd op een normale verdeling van de meetgegevens. Wanneer parametrische toetsen gebruikt worden voor analyse van waterkwaliteitsgegevens, dient gecontroleerd te worden of deze gegevens normaal verdeeld zijn. Met de verdelingsvrije Kolmogorov-Smirnov toets (*goodness-of-fit* toets) kan getoetst worden of een waargenomen (frequentie)verdeling overeen komt met een theoretische verdeling. In theorie kan met deze toets iedere verdeling getoetst worden. De toets van Lilliefors is afgeleid van de Kolmogorov-Smirnov toets. Hiermee kan worden getoetst of een meetreeks normaal verdeeld is.

4.2.1.2 TOEPASBAARHEID EN BIJZONDERHEDEN

De toets van Lilliefors wordt in het algemeen uitgevoerd op een dataset waaruit alle bekende bronnen van variantie zijn verwijderd. Voor deze toets zijn dit (stap)trend en seizoensinvloeden. Een trend- en periodiciteitsvrije subset van de meetreeks wordt vervolgens getoetst op afhankelijkheid (§ 4.4.1). Raadpleeg de bijlage 'Statistiek in de praktijk' (deel 1) wanneer blijkt dat deze subset afhankelijkheid vertoont.

Voor de uitvoering van de toets op normaliteit worden de volgende randvoorwaarden aan de dataset gesteld:

- de meetreeks is vrij van trend;
- de meetreeks is vrij van seizoensinvloeden;
- de meetwaarden zijn onafhankelijk.

4.2.1.3 HYPOTHESE

De toets is gebaseerd op het maximale verschil tussen de cumulatieve verdelingsfunctie van de normale verdeling en de cumulatieve verdelingsfunctie van de gegevens. De hypothese en het alternatief luiden:

H_0 : De gegevens hebben een normale verdeling met een niet gespecificeerd gemiddelde en een niet gespecificeerde variantie;

H_A : De verdelingsfunctie van de gegevens is niet-normaal.

4.2.1.4 TOETSINGSGROOTHEID, FORMULES EN KRITIEKE WAARDEN

De toets van Lilliefors wordt met behulp van onderstaande formules uitgevoerd.

$$z_i = \frac{x_i - \bar{X}}{s} \quad (22)$$

$$S(z_i) = \frac{N_{\leq z_i}}{N_{tot}} \quad (23)$$

$$S'(z_i) = \frac{N_{< z_i}}{N_{tot}} \quad (24)$$

$$T_2 = \text{Max} \left[\text{Max} |F(z_i) - S(z_i)|, \text{Max} |F(z_i) - S'(z_i)| \right] \quad (25)$$

Hierin is:

T_2	toetsingsgrootheid voor de toets van Lilliefors
Z_i	de gestandaardiseerde waarde van meetwaarde x_i
X_i	individuele meetwaarden
$\bar{X}$	gemiddelde van de meetreeks
s	standaarddeviatie van de meetreeks
$N_{\leq z_i}$	aantal meetwaarden kleiner of gelijk aan z_i
$N_{< z_i}$	aantal meetwaarden kleiner dan z_i
N_{tot}	totaal aantal meetwaarden
$S(z_i)$	cumulatieve verdelingsfunctie S van alle N waarden z_i
$S'(z_i)$	cumulatieve verdelingsfunctie S' van alle N waarden z_i
$F(z_i)$	cumulatieve normale verdelingsfunctie

De kritieke waarden van de toetsingsgrootheid T_2 kunnen voor een onbetrouwbaarheidsniveau α worden afgelezen in de Lilliefors-tabel (bijlage 6). De H_0 -hypothese wordt geaccepteerd wanneer T_2 kleiner is dan de kritieke waarde.

4.2.1.5 STAPPENPLAN UITVOERING TOETS

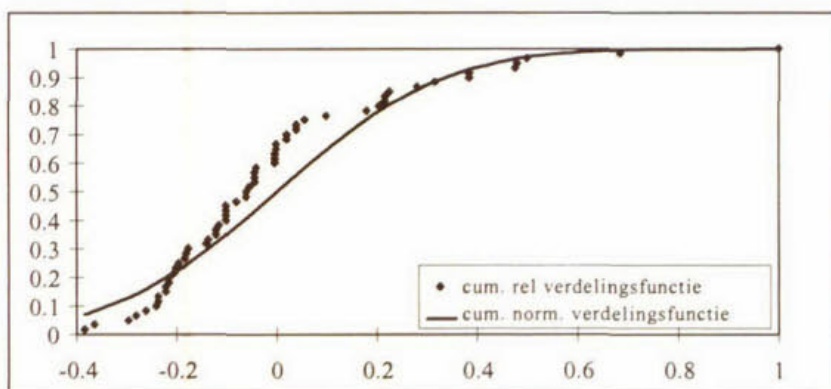
- Stap 1: Maak een trend- en periodiciteitsvrije subset van de dataset volgens respectievelijk § 3.12 en § 3.11.
- Stap 2: Toets deze subset op afhankelijkheid (§ 4.4.1) en ga verder met stap 3 wanneer voor deze toets de H_0 -hypothese wordt geaccepteerd.
- Stap 3: Standaardiseer de meetgegevens volgens formule (22).
- Stap 4: Sorteert de meetgegevens in oplopende volgorde.
- Stap 5: Bepaal per meetgegeven de cumulatieve verdelingsfunctie: $S(z_i)$ en $S'(z_i)$ volgens de formules (23), respectievelijk (24).
- Stap 6: Bepaal het grootste verschil tussen $F(z_i)$, $S(z_i)$ en $F(z_i)$, $S'(z_i)$ volgens formule (25).
- Stap 7: De meetgegevens zijn normaal verdeeld indien de toetsingsgrootte T_2 de kritieke waarde uit de Lilliefors-tabel (bijlage 6) bij het gewenste onbetrouwbaarheidsniveau α niet overschrijdt.

4.2.1.6 REKENVOORBEELD (CASE)

Case: normaliteit (Toets van Lilliefors)

Data: Bergsche Achterplas, totaalfosfaat van 29-11-85 t/m 21-02-90; zie ook § 7.1 (case t-toets op verschil in gemiddelden).

In de data is seizoensinvloed aangetoond⁸ (Kruskal-Wallis bij $\alpha=0.05$; § 4.1.1.6). Er is daarom gecorrigeerd voor seizoensinvloed door van elke waarde het bijbehorende, langjarige seizoensgemiddelde af te trekken (§ 3.11).



Figuur 4-4: P-totaal Bergsche Achterplas (1985 tot 1990): cumulatieve relatieve en cumulatieve normale verdelingsfunctie

- Stap 1-5: Zie Tabel 4-2. In Figuur 4-4 zijn de kolommen E en F uitgezet tegen D. De toetsingsgrootte T_2 is de grootste afstand tussen de lijnen.
- Stap 6: De minimum en maximum waarden in de laatste twee kolommen in de onderstaande tabel zijn:
- | | | |
|----------|----------|----------|
| Maximum: | 0.079107 | 0.095774 |
| Minimum: | -0.17441 | -0.15774 |
- Stap 7: Het grootste absolute verschil is dus $(T_2)=0.1744$. Bij $N=60$ en $\alpha=0.05$ is de kritieke waarde 0.1144. De conclusie luidt derhalve dat de data niet normaal verdeeld zijn, aangezien $T_2 \leq 0.1144$.

⁸ Men kan overwegen altijd te corrigeren voor seizoensinvloed, ongezien de toetsingsuitkomst, aangezien op basis van systeemkennis seizoensinvloed veelal verondersteld kan worden. Een eventueel aanwezige seizoensinvloed kan wel aanwezig, maar moeilijk aantoonbaar zijn.

Tabel 4-2: (Tussen)resultaten toets van Lilliefors

Rang nummer	datum	seizoensvrije waarde	gestandaardiseerde waarde formule 19	cumulatieve verdelings functie 1/A	normale verdeling behorend bij C	verschil op basis van S (D-E)	verschil op basis van S' (D'-E)
A			C	D	E		
1	26-11-90	-0.384	-1.467	0.016667	0.071247	0.054581	0.071247
2	30-11-89	-0.364	-1.390	0.033333	0.082232	0.048899	0.065565
3	3-08-89	-0.296	-1.131	0.05	0.129107	0.079107	0.095774
4	6-05-87	-0.281	-1.073	0.066667	0.141555	0.074888	0.091555
5	27-02-89	-0.261	-0.997	0.083334	0.15938	0.076046	0.092713
6	29-01-90	-0.241	-0.921	0.1	0.178614	0.078614	0.095281
7	30-08-89	-0.236	-0.902	0.116667	0.183642	0.066975	0.083642
8	22-08-90	-0.236	-0.902	0.133334	0.183642	0.050309	0.066975
9	3-02-87	-0.221	-0.844	0.15	0.199248	0.049248	0.065915
10	21-02-90	-0.221	-0.844	0.166667	0.199248	0.032581	0.049248
11	5-08-87	-0.216	-0.825	0.183334	0.204623	0.021289	0.037956
12	26-07-90	-0.216	-0.825	0.2	0.204623	0.004623	0.021289
13	2-11-88	-0.204	-0.779	0.216667	0.217869	0.001202	0.017868
14	21-12-89	-0.201	-0.768	0.233334	0.221256	-0.01208	0.004589
15	28-06-90	-0.196	-0.749	0.250001	0.226968	-0.02303	-0.00637
16	20-09-90	-0.184	-0.703	0.266667	0.241009	-0.02566	-0.00899
17	1-12-88	-0.181	-0.692	0.283334	0.244592	-0.03874	-0.02208
18	29-06-89	-0.176	-0.673	0.300001	0.250626	-0.04937	-0.03271
19	2-04-87	-0.141	-0.539	0.316667	0.294976	-0.02169	-0.00503
20	8-06-88	-0.136	-0.520	0.333334	0.301595	-0.03174	-0.01507
21	5-01-87	-0.121	-0.463	0.350001	0.321841	-0.02816	-0.01149
22	2-03-88	-0.121	-0.463	0.366667	0.321841	-0.04483	-0.02816
23	5-07-88	-0.116	-0.443	0.383334	0.328713	-0.05462	-0.03795
24	14-05-86	-0.101	-0.386	0.400001	0.349672	-0.05033	-0.03366
25	3-12-87	-0.101	-0.386	0.416668	0.349672	-0.067	-0.05033
26	1-02-88	-0.101	-0.386	0.433334	0.349672	-0.08366	-0.067
27	30-01-89	-0.101	-0.386	0.450001	0.349672	-0.10033	-0.08366
28	5-03-87	-0.081	-0.310	0.466668	0.378335	-0.08833	-0.07167
29	4-01-88	-0.061	-0.234	0.483334	0.407685	-0.07565	-0.05898
30	5-04-88	-0.061	-0.234	0.500001	0.407685	-0.09232	-0.07565
31	5-08-88	-0.056	-0.214	0.516668	0.415111	-0.10156	-0.08489
32	5-10-87	-0.044	-0.169	0.533334	0.433053	-0.10028	-0.08361
33	5-09-88	-0.044	-0.169	0.550001	0.433053	-0.11695	-0.10028
34	30-10-89	-0.044	-0.169	0.566668	0.433053	-0.13362	-0.11695
35	26-03-90	-0.041	-0.157	0.583335	0.437561	-0.14577	-0.12911
36	4-09-87	-0.004	-0.016	0.600001	0.493655	-0.10635	-0.08968
37	28-09-89	-0.004	-0.016	0.616668	0.493655	-0.12301	-0.10635
38	22-10-90	-0.004	-0.016	0.633335	0.493655	-0.13968	-0.12301
39	31-05-89	-0.001	-0.004	0.650001	0.498223	-0.15178	-0.13511
40	30-05-90	-0.001	-0.004	0.666668	0.498223	-0.16844	-0.15178
41	30-03-89	0.019	0.072	0.683335	0.528658	-0.15468	-0.13801
42	26-04-90	0.019	0.072	0.700001	0.528658	-0.17134	-0.15468
43	28-04-89	0.039	0.148	0.716668	0.558926	-0.15774	-0.14108
44	4-02-86	0.039	0.148	0.733335	0.558926	-0.17441	-0.15774
45	6-11-87	0.056	0.213	0.750002	0.584393	-0.16561	-0.14894
46	3-04-86	0.099	0.377	0.766668	0.647024	-0.11964	-0.10298
47	4-03-86	0.179	0.683	0.783335	0.752602	-0.03073	-0.01407
48	2-07-87	0.204	0.778	0.800002	0.781756	-0.01825	-0.00158
49	3-11-86	0.216	0.824	0.816668	0.795016	-0.02165	-0.00499
50	6-10-88	0.216	0.824	0.833335	0.795016	-0.03832	-0.02165
51	4-08-86	0.224	0.854	0.850002	0.803583	-0.04642	-0.02975
52	6-01-86	0.279	1.064	0.866668	0.856438	-0.01023	0.006436
53	3-09-86	0.316	1.206	0.883335	0.886034	0.002698	0.019365
54	3-07-86	0.384	1.465	0.900002	0.928579	0.028578	0.045244
55	3-06-87	0.384	1.465	0.916669	0.928579	0.011911	0.028578
56	1-10-86	0.476	1.817	0.933335	0.965354	0.032018	0.048685
57	2-05-88	0.479	1.828	0.950002	0.966222	0.01622	0.032887
58	4-12-86	0.499	1.904	0.966669	0.971565	0.004896	0.021563
59	4-06-86	0.684	2.611	0.983335	0.99548	0.012145	0.028812
60	29-11-85	0.999	3.813	1.000002	0.999931	-7.1E-05	0.016596

4.2.2 SHAPIRO-WILK TOETS

4.2.2.1 INLEIDING

Evenals de toets van Lilliefors wordt met de Shapiro-Wilk toets aangetoond of een meetreeks normaal verdeeld is.

4.2.2.2 TOEPASBAARHEID EN BIJZONDERHEDEN

De Shapiro-Wilk toets wordt in het algemeen uitgevoerd op een dataset waaruit alle bekende bronnen van variantie zijn verwijderd. Voor deze toets zijn dit (stap)trend en seizoensinvloeden.

Voor de uitvoering van de Shapiro-Wilk toets worden de volgende randvoorwaarden aan de dataset gesteld:

- de meetreeks is vrij van trendinvloeden;
- de meetreeks is vrij van seizoensinvloeden.

4.2.2.3 HYPOTHESE

Met behulp van de Shapiro-Wilk toets wordt de volgende hypothese getoetst:

H_0 : De verdelingsfunctie van de meetreeks is normaal;

H_A : De verdelingsfunctie van de meetreeks is niet-normaal.

4.2.2.4 TOETSINGSGROOTHEID EN FORMULES EN KRITIEKE WAARDEN

De toetsingsgrootte W van de Shapiro-Wilk toets wordt berekend volgens:

$$W = \frac{S^2}{\sum_{i=1}^N (x_i - \bar{X})^2} \quad (26)$$

$$\text{waarin} \quad S = \sum_{k=1}^{f_N} [a_k \times (y_{N+1-k} - y_k)] \quad (27)$$

$$f_N = N/2 \quad \text{wanneer } N \text{ even is}$$

$$f_N = (N-1)/2 \quad \text{wanneer } N \text{ oneven is}$$

Hierin is:

W	toetsingsgrootheid voor de Shapiro-Wilk toets
X_i	individuele meetwaarden
$\bar{X}$	gemiddelde van de meetreeks
N	aantal meetwaarden
y_k	de van kleinste naar grootste meetwaarde geordende meetreeks (Y_1 is de kleinste en Y_N de grootste meetwaarde)
k	indexnummer van de meetwaarden in de geordende meetreeks
a_k	coëfficiënt, afhankelijk van k en N (Bijlage 8)

De kritieke waarden van de toetsingsgrootheid W kunnen voor N metingen en een onbetrouwbaarheidsniveau α worden afgelezen in een tabel (bijlage 7). De hypothese H_0 wordt geaccepteerd wanneer W kleiner is dan de kritieke waarde.

4.2.2.5 STAPPENPLAN UITVOERING TOETS

- Stap 1: Maak een trend- en periodiciteitsvrije subset van de dataset volgens respectievelijk § 3.12 en § 3.11.
- Stap 2: Sorteer de meetgegevens in oplopende volgorde van groot naar klein.
- Stap 3: Bereken S met behulp van formule (29).
- Stap 4: Bereken de toetsingsgrootheid W volgens formule (26).
- Stap 5: De meetgegevens zijn normaal verdeeld indien de toetsingsgrootheid W de kritieke waarde uit de tabel voor overschrijdingskansen (bijlage 7) bij het gewenste onbetrouwbaarheidsniveau α en gegeven N niet overschrijdt.

4.2.3 SKEW

4.2.3.1 INLEIDING

De *skew* is een maat voor de scheefheid van een verdeling ten opzichte van de normale verdeling. Een positieve skew treedt op als hoge waarnemingen relatief verder van het gemiddelde af liggen dan lage waarnemingen, een negatieve skew als dit net andersom is.

4.2.3.2 TOEPASBAARHEID EN BIJZONDERHEDEN

De toets voor *skew* vereist dat de data onderling onafhankelijk zijn. Dit betekent impliciet dat een toets op *skew* alleen zinvol is na verwijdering van trend en seizoensinvloed, aangezien deze afhankelijkheid veroorzaken.

De toets wordt in het algemeen uitgevoerd op een dataset waaruit alle bekende bronnen van variantie zijn verwijderd. Voor deze toets zijn dit (stap)trend en seizoensinvloeden. Een trend- en periodiciteitsvrije subset van de meetreeks wordt vervolgens getoetst op afhankelijkheid (§ 4.4.1) en homogeniteit van variantie (§ 4.3.1). Raadpleeg de bijlage 'Statistiek in de praktijk' (deel 1) wanneer blijkt dat deze subset afhankelijkheid of heterogeniteit van variantie vertoont.

Voor de uitvoering van de toets voor *skew* worden de volgende randvoorwaarden aan de dataset gesteld:

- de meetreeks is vrij van trendinvloeden;
- de meetreeks is vrij van seizoensinvloeden;
- de meetwaarden zijn onafhankelijk;
- de variantie in de dataset is homogeen.

4.2.3.3 HYPOTHESE

De toets op *skew* toetst de volgende veronderstelling:

H_0 : De scheefheid van de data wijkt niet af van de scheefheid van een normale verdeling;

H_A : De data zijn zodanig scheef verdeeld dat een normale verdeling onwaarschijnlijk is.

4.2.3.4 TOETSINGSGROOTHEID, FORMULES EN KRITIEKE WAARDEN

De toetsingsgrootheid g_1 voor *skew* wordt op onderstaande wijze berekend:

$$m_3 = \sum_{i=1}^N (x_i - \bar{X})^3 / N \quad (28)$$

$$m_2 = \sum_{i=1}^N (x_i - \bar{X})^2 / N \quad (29)$$

$$g_1 = \frac{m_3}{m_2 \sqrt{m_2}} \quad (30)$$

Hierin is:

g_1	toetsingsgrootheid
x_i	meetwaarden
$\bar{X}$	gemiddelde van alle meetwaarden
N	totaal aantal meetwaarden
i	indexnummer voor individuele meetwaarden

De toetsingsgrootheid g_1 volgt een normale verdeling met een gemiddelde van 0.0 en een standaardafwijking van $\sqrt{6/N}$. H_0 wordt geaccepteerd indien $|g_1|$ bij een onbetrouwbaarheidsniveau α de kritieke waarde van de normale verdeling voor $(1 - \frac{1}{2}\alpha)$ niet overschrijdt: $|g_1| < Z_{(1 - \frac{1}{2}\alpha)}$.

Bij kleine datasets ($25 < N < 150$) is de normale benadering onnauwkeurig. Voor deze toets worden voor kleine datasets kritieke waarden voor $\alpha = 0.05$ en 0.01 gegeven in bijlage 9.

4.2.3.5 UITVOERING TOETS

Stap 1:	Maak een trend- en periodiciteitsvrije subset van de dataset volgens respectievelijk § 3.12 en § 3.11.
Stap 2:	Toets deze subset op afhankelijkheid (§ 4.4.1) en homogeniteit van variantie (§ 4.3.1). Ga verder met stap 3 wanneer voor beide toetsen de H_0 -hypothese wordt geaccepteerd.
Stap 3:	Bereken het totale gemiddelde van de N data.
Stap 4:	Bereken m_3 (formule (28)).

- Stap 5: Bereken m_2 (formule (29)).
- Stap 6: Bereken g_1 (formule (30)).
- Stap 7: Onder de nulhypothese H_0 is g_1 normaal verdeeld met een gemiddelde van 0.0 en een standaardafwijking van $\sqrt{(6/N)}$. H_0 moet verworpen worden indien $|g_1|$ bij een onbetrouwbaarheid α de kritieke waarde van de normale verdeling bij $(1-\frac{1}{2}\alpha)$ overschrijdt ($|g_1| \geq Z_{(1-\frac{1}{2}\alpha)}$).

4.2.4 KURTOSIS

4.2.4.1 INLEIDING

De *kurtosis* is een maat voor de gepiektheid van een verdeling ten opzichte van de normale verdeling. Een normale verdeling heeft een gepiektheid van 3.0. Indien de *kurtosis* groter is dan 3.0 dan is de verdelingscurve vlakker dan op grond van normaliteit verwacht zou worden. Bij een lagere waarde zijn de data ten opzichte van de normale verdeling gepiekt.

4.2.4.2 TOEPASBAARHEID EN BIJZONDERHEDEN

Evenals voor *skew* is het voor het aantonen van *kurtosis* vereist dat de gegevens onderling onafhankelijk zijn. Dit betekent dat een toets op *kurtosis* alleen zinvol is na verwijdering van trend en seizoensinvloed, aangezien deze afhankelijkheid veroorzaken.

De toets voor *kurtosis* wordt in het algemeen uitgevoerd op een dataset waaruit alle bekende bronnen van variantie zijn verwijderd. Voor deze toets zijn dit (stap)trend en seizoensinvloeden. Een trend- en periodiciteitsvrije subset van de meetreeks wordt vervolgens getoetst op afhankelijkheid (§ 4.4.1) en homogeniteit van variantie (§ 4.3.1). Raadpleeg de bijlage 'Statistiek in de praktijk' (ddel 1) wanneer blijkt dat deze subset afhankelijkheid of heterogeniteit van variantie vertoont.

Voor de uitvoering van de toets voor *kurtosis* worden de volgende randvoorwaarden aan de dataset gesteld:

- de meetreeks is vrij van trendinvloeden;
- de meetreeks is vrij van seizoensinvloeden;
- de meetwaarden zijn onafhankelijk;
- de variantie in de dataset is homogeen.

4.2.4.3 HYPOTHESE

De toets op *kurtosis* toetst de volgende veronderstelling:

H_0 : De gepiektheid van de data wijkt niet af van de gepiektheid van een normale verdeling;

H_A : De data zijn zodanig gepiekt verdeeld dat een normale verdeling onwaarschijnlijk is.

4.2.4.4 TOETSINGSGROOTHEID, FORMULES EN KRITIEKE WAARDEN

De toets voor het aantonen van *kurtosis* wordt volgens onderstaande formules uitgevoerd:

$$m_4 = \sum_{i=1}^N (x_i - \bar{X})^4 / N \quad (31)$$

$$m_2 = \sum_{i=1}^N (x_i - \bar{X})^2 / N \quad (32)$$

$$g_2 = \frac{m_4}{m_2^2} - 3 = b_2 - 3 \quad ('3': \text{correctie voor normale verdeling}) \quad (33)$$

Hierin is:

g_2	toetsingsgrootheid
x_i	meetwaarden
$\bar{X}$	gemiddelde van alle meetwaarden
N	totaal aantal meetwaarden
i	indexnummer voor individuele meetwaarden

De toetsingsgrootheid g_2 volgt een normale verdeling met een gemiddelde van 0.0 en een standaardafwijking van $\sqrt{(24/N)}$. H_0 wordt geaccepteerd indien $|g_2|$ bij een onbetrouwbaarheidsniveau α de kritieke waarde van de normale verdeling bij $(1-\frac{1}{2}\alpha)$ niet overschrijdt ($|g_2| < Z_{(1-\frac{1}{2}\alpha)}$). Deze normale benadering geldt echter slechts bij datasets (N) groter dan 1000. Bij kleinere datasets is de normale benadering onnauwkeurig. Exacte kritieke waarden voor $N < 1000$ voor $\alpha = 0.05$ en $\alpha = 0.01$ worden gegeven in bijlage 10.

4.2.4.5 STAPPENPLAN UITVOERING TOETS

Stap 1:	Maak een trend- en periodiciteitsvrije subset van de dataset volgens respectievelijk § 3.12 en § 3.11.
Stap 2:	Toets deze subset op afhankelijkheid (§ 4.4.1) en homogeniteit van variantie (§ 4.3.1). Ga verder met stap 3 wanneer voor beide toetsen de H_0 -hypothese wordt geaccepteerd.
Stap 3:	Bereken het totale gemiddelde van de N data.
Stap 4:	Bereken m_4 (formule (31)).
Stap 5:	Bereken m_2 (formule (32)).
Stap 6:	Bereken g_2 (formule (33)).
Stap 7:	Onder de nulhypothese H_0 is g_2 normaal verdeeld met een gemiddelde van 0.0 en een standaardafwijking van $\sqrt{(24/N)}$. H_0 moet verworpen worden indien $ g_2 $ bij een onbetrouwbaarheid α de kritieke waarde van de normale verdeling bij $(1-\frac{1}{2}\alpha)$ overschrijdt. Bij $N < 1000$ dan dient de tabel in bijlage 10 te worden gebruikt.

4.3 ANALYSES HOMOGENITEIT VAN VARIANTIE

De variantie is een maat voor de afwijking van de meetwaarden ten opzichte van het gemiddelde van de meetreeks. Een grote variantie betekent dat de spreiding rond het gemiddelde groot is. Dit is nadelig voor het toetsen van statistische hypothesen. In het algemeen neemt de variantie toe wanneer trend en periodiciteit in de dataset voorkomen.

De variantie in een meetreeks kan ook toe of afnemen bij aanwezigheid van een staptrend. In de parametrische t-toets voor gemiddelden (§ 7.1) wordt hierop bijvoorbeeld getoetst.

4.3.1 F-TOETS OP VERSCHIL IN VARIANTIES

4.3.1.1 INLEIDING

Met behulp van de F-toets kan worden getoetst of de varianties van twee datareeksen gelijk zijn. Wanneer twee datasets onafhankelijk zijn en afkomstig uit normaal verdeelde populaties dan volgt het quotiënt van beide varianties een zogenaamde F-verdeling (§ 2.1). De parameters van deze verdeling zijn het aantal vrijheidsgraden van beide steekproeven.

4.3.1.2 TOEPASBAARHEID EN BIJZONDERHEDEN

De F-toets wordt in het algemeen uitgevoerd op een dataset waaruit alle bekende bronnen van variantie zijn verwijderd. Voor deze toets zijn dit (stap)trend en seizoensinvloeden. Een trend- en periodiciteitsvrije subset van de meetreeks wordt vervolgens getoetst op normaliteit (§ 4.2) en afhankelijkheid (§ 4.4.1). Raadpleeg de bijlage 'Statistiek in de praktijk' wanneer blijkt dat deze subset niet-normaal verdeeld is of afhankelijkheid vertoont.

De F-toets is zeer gevoelig voor afwijkingen van de normale verdeling.

Voor de uitvoering van de F-toets worden de volgende randvoorwaarden aan de dataset gesteld:

- beide meetreeksen zijn normaal verdeeld;
- de meetwaarden zijn in elke meetreeks onderling onafhankelijk.

4.3.1.3 HYPOTHESE

Met de F-toets wordt de hypothese getoetst, dat de varianties van beide populaties (σ_1^2 en σ_2^2) gelijk zijn:

$$H_0 : \sigma_1^2 = \sigma_2^2;$$

$$H_A : \sigma_1^2 \neq \sigma_2^2.$$

4.3.1.4 TOETSINGSGROOTHEID, FORMULES EN KRITIEKE WAARDEN

De toetsingsgrootheid F wordt met behulp van onderstaande formule berekend:

$$F = \frac{s_1^2}{s_2^2} \quad (34)$$

Hierin is

F toetsingsgrootheid

s_1^2, s_2^2 schatters van de populatie varianties σ_1^2 en σ_2^2 van beide steekproeven met respectievelijk N_1 en N_2 data

De toetsingsgrootheid F volgt de F -verdeling volgens Fisher met N_1-1 , N_2-1 vrijheidsgraden (df_1 respectievelijk df_2).

H_0 wordt geaccepteerd wanneer $F_{L(df_1, df_2)} \leq F \leq F_{R(df_1, df_2)}$. Hierbij wordt F_L berekend volgens:

$$F_{L(df_1, df_2)} = 1/F_{R(df_2, df_1)}$$

$F_{R(df_1, df_2)}$ en $F_{R(df_2, df_1)}$ kunnen in een tabel voor (rechter) overschrijdingskansen van de F -verdeling van Fisher worden opgezocht (bijlage 3).

4.3.1.5 STAPPENPLAN UITVOERING TOETS

- Stap 1: Maak een trend- en periodiciteitsvrije subset van de dataset volgens respectievelijk § 3.12 en § 3.11.
- Stap 2: Toets deze subset op normaliteit (§ 4.2) en afhankelijkheid (§ 4.4.1) en ga verder met stap 3 wanneer voor beide toetsen de H_0 -hypothese wordt geaccepteerd.
- Stap 3: Met behulp van formule (34) wordt de toetsingsgrootheid F berekend.
- Stap 4: De hypothese toets is tweezijdig. Omdat de verdeling asymmetrisch is, moeten de rechter en linker overschrijdingskansen apart worden uitgerekend. De rechter overschrijdingskans $F_{R(df_1, df_2)}$ kan in de tabel worden afgelezen. Voor de linker overschrijdingskans wordt de inverse van de rechter overschrijdingskans berekend:

$$F_{L(df_1, df_2)} = \frac{1}{F_{R(df_2, df_1)}}$$

- Stap 5: H_0 wordt geaccepteerd wanneer $F_{L(df_1, df_2)} \leq F \leq F_{R(df_1, df_2)}$.

4.3.1.6 REKENVOORBEELD (CASE)

Case: homogeniteit van variantie (F-toets)

Data: Bergsche Achterplas, totaalfosfaat; zie ook § 7.1.6 (case t-toets op verschil in gemiddelden).

Getoetst moest worden of de variantie na de ingreep in 1985 veranderd is. In de data na 1985 is seizoensinvloed aangetoond (Kruskal-Wallis bij $\alpha=0.05$; § 4.1.1.6). Hiervoor is gecorrigeerd (§ 3.11.2).

Stap 1: $F=0.366556/0.68618=5.3419802$.

Stap 2: $\alpha=0.05$, $df_1=df(\text{1ste helft})=59$, $df_2=df(\text{2de helft})=59$

$F_{\alpha}(df_1, df_2)=1.53$, $F_{1-\alpha}(df_1, df_2)=1/1.53=0.65$.

Stap 3: $5.34 > 1.53$; H_0 wordt verworpen, de variantie van 1 (voor de ingreep) is niet gelijk aan de variantie van 2 (na de ingreep).

4.4 ANALYSES AFHANKELIJKHEID WAARNEMINGEN

Afhankelijkheid van waarnemingen is het verschijnsel dat een bepaalde meetwaarde min of meer dezelfde waarde heeft als de voorgaande meetwaarde en derhalve 'voorspelbaar' is. In statistische termen: de meetwaarden zijn niet random verdeeld rond het gemiddelde van de meetreeks. De meetwaarden zijn onderling afhankelijk oftewel gecorreleerd.

Correlatie van meetreeksen in de tijd is de correlatie van meetreeksen met zichzelf, verschoven in de tijd. Trend en periodiciteit zijn strikt genomen vormen van correlatie. Indien alle bekende invloeden (met name trend en periodiciteit) op een meetreeks verwijderd zijn is de correlatie lager. De resterende, niet door bekende processen veroorzaakte correlatie wordt seriële correlatie of autocorrelatie genoemd.

Indien autocorrelatie niet onderkend wordt, wordt de betrouwbaarheid van met name parametrische toetsen (maar ook enkele verdelingsvrije toetsen) beïnvloed. Zo neemt bijvoorbeeld de kans toe dat een niet bestaande trend wel als zodanig wordt gedetecteerd (Hirsch en Slack, 1984).

De aanwezigheid van autocorrelatie in een tijdreeks beïnvloedt het aantal onafhankelijke monsters en heeft diensgevolge invloed op de optimale meetfrequentie. Naarmate de autocorrelatie toeneemt, is het tijdsinterval tussen twee opeenvolgende onafhankelijke monsters groter. Anders gezegd: op basis van onderling onafhankelijke metingen kan hetzelfde statistische resultaat worden bereikt met een geringere meetinspanning.

De aanwezigheid van autocorrelatie kan worden aangetoond met behulp van de Runs toets. Deze toets wordt beschreven in § 4.4.1. De mate van autocorrelatie wordt uitgedrukt in de zogenaamde autocorrelatiecoëfficiënt. In § 4.4.2. worden drie methoden beschreven waarmee de autocorrelatiecoëfficiënt kan worden berekend. In § 4.4.4 is beschreven hoe en onder welke condities hogere orde autocorrelatiecoëfficiënten ($\text{lag}(k)$) kunnen worden berekend uit de eerste orde autocorrelatiecoëfficiënt ($\text{lag}(1)$). De methode om het aantal onafhankelijke meetwaarden te berekenen uit het werkelijke aantal meetwaarden wordt beschreven in § 4.4.5.

4.4.1 RUNS TOETS VAN WALD-WOLFOWITZ

4.4.1.1 INLEIDING

Met behulp van deze toets kan worden aangetoond of de meetwaarden op elk tijdstip willekeurig rond μ zijn verdeeld of dat de meetwaarden tijdafhankelijk rond μ verdeeld zijn. De toetsingsgrootte is het aantal runs (r) waarbij de metingen aan dezelfde kant van het gemiddelde liggen.

4.4.1.2 TOEPASBAARHEID EN BIJZONDERHEDEN

De voorwaarden die aan de dataset worden gesteld alvorens de Runs toets wordt toegepast zijn afhankelijk van het doel waarvoor de toets wordt uitgevoerd. In algemene zin kan met behulp van de Runs toets de aanwezigheid van elke vorm van (seriële) correlatie worden aangetoond. Als er trend of periodiciteit in de te onderzoeken dataset aanwezig is, dan kan die in theorie met de Runs toets worden aangetoond. In die gevallen bewijst de Runs toets alleen dat er seriële correlatie aanwezig is en niet wat de aard daarvan is.

De Run toets kan ook aangewend worden om de afhankelijkheid in de meetreeks aan te tonen. Wanneer dit de doelstelling is om de toets toe te passen, dienen eerst alle bekende bronnen van correlatie te zijn verwijderd, te weten (stap)trend en seizoensinvloeden. In het kader van dit hoofdstuk, en de hoofdstukken 6 en 7 wordt de Runs toets ingezet om de aanwezigheid van afhankelijkheid aan te tonen. Derhalve wordt er van uitgegaan dat de dataset vrij is van trend en seizoensinvloeden (hoewel dit geen eis voor de toets zelf is).

Voor de uitvoering van de Runs toets worden de volgende randvoorwaarden aan de dataset gesteld:

- de meetreeks is vrij van trendinvloeden;
- de meetreeks is vrij van seizoensinvloeden.

4.4.1.3 HYPOTHESE

Met de Runs toets wordt de volgende hypothese geëvalueerd:

H_0 : Er is geen seriële afhankelijkheid in de dataset aanwezig;

H_A : Er is seriële afhankelijkheid in de dataset aanwezig.

4.4.1.4 TOETSINGSGROOTHEID, FORMULES EN KRITIEKE WAARDEN

De toetsingsgrootte r en de standaardisatie Z hiervan worden berekend volgens:

$$Z = \frac{r - \mu_r}{\sigma_r} \quad (35)$$

met
$$\mu_r = \frac{2N_1N_2}{N_1 + N_2} + 1$$

en

$$\sigma_r = \sqrt{\frac{2N_1N_2(2N_1N_2 - N_1 - N_2)}{(N_1 + N_2)^2(N_1 + N_2 - 1)}}$$

Hierin is:

- Z gestandaardiseerde toetsingsgrootte r
 r het aantal runs: dit is het aantal clusters van één of meer opeenvolgende meetresultaten
 boven of onder het gemiddelde
 N_1, N_2 aantal meetwaarden boven (N_1) en onder (N_2) het gemiddelde

Wanneer het aantal metingen in beide deelsets (N_1 en N_2) groter is dan 20, kan de hypothese getoetst worden met behulp van de standaard normale verdeling volgens formule (35). De kritieke waarde bij een gegeven onbetrouwbaarheidsniveau α kan worden afgelezen in een tabel voor (rechter) overschrijdingskansen van de standaard normale verdeling. De hypothese H_0 (de steekproeven zijn afkomstig uit dezelfde verdeling) wordt bij een onbetrouwbaarheidsniveau α geaccepteerd wanneer $|Z| < Z_{(1-\frac{1}{2}\alpha)}$.

Is het aantal metingen per (deel)dataset kleiner dan 20, dan wordt de nulhypothese verworpen wanneer $r \leq g$, waarbij g kan worden opgezocht in een tabel met kritieke waarden voor r (bijlage 13).

4.4.1.5 STAPPENPLAN UITVOERING TOETS

- | | |
|---------|---|
| Stap 1: | Maak een trend- en periodiciteitsvrije subset van de dataset volgens respectievelijk § 3.12 en § 3.11. |
| Stap 2: | Bepaal het aantal waarnemingen boven en onder het gemiddelde, respectievelijk N_1 en N_2 . |
| Stap 3: | Bepaal het aantal clusters r van elkaar opvolgende waarnemingen uitsluitend onder danwel uitsluitend boven het gemiddelde. |
| Stap 4: | Bereken μ_r en σ_r zoals in formule (35). |
| Stap 5: | Met de grootte Z wordt bij een gegeven onbetrouwbaarheidsniveau α de hypothese bevestigd (H_0 is waar) of verworpen (H_1 is waar). |

4.4.1.6 REKENVOORBEELD (CASE)

Case: seriële correlatie

Data: Bergsche Achterplas, totaalafosfaat van 29-11-85 t/m 21-02-90; zie ook § 7.1.6 (case t-toets op verschil in gemiddelden).

In de data is seizoensinvloed aangetoond (Kruskal-Wallis bij $\alpha=0.05$). Er is daarom gecorrigeerd voor seizoensinvloed door van elke waarde het bijbehorende, langjarige seizoensgemiddelde af te trekken (§ 3.11)⁹.

Stap 1: Gemiddelde: 0.000167 $N:60$ $N_1=20$ $N_2=40$

Stap 2: Aantal runs: 16 (8 clusters boven, 8 onder het gemiddelde)

Stap 3: $m_r = (2 \cdot 20 \cdot 40) / (20 + 40) + 1 = 27.667$

$s_r = \sqrt{[(2 \cdot 20 \cdot 40 \times (2 \cdot 20 \cdot 40 - 20 - 40)) / (60^2 \times (60 - 1))]} = \sqrt{11.6} \approx 3.406$

$Z = (r - m_r) / s_r = 16 - 27.667 / 3.406 = -3.425$

Stap 4: $\alpha = 0.05$, $Z_{(1-\frac{1}{2}\alpha)} = 1.96$

Handhaaf H_0 indien $|Z| < 1.96$. $Z = -3.425$, dus verwerp H_0 . Er is seriële afhankelijkheid aanwezig.

⁹ Men kan overwegen altijd te corrigeren voor seizoensinvloed, aangezien de toetsingsuitkomst, aangezien op basis van systeemkennis seizoensinvloed veelal verondersteld kan worden. Een eventueel aanwezige seizoensinvloed kan wel aanwezig, maar moeilijk aantoonbaar zijn.

4.4.2 BEREKENING VAN DE AUTOCORRELATIECOËFFICIËNTEN

4.4.2.1 INLEIDING

Autocorrelatie kan het best worden omschreven als een sterke onderlinge afhankelijkheid van opeenvolgende meetwaarden in een meetreeks en treedt met name op bij hoge meetfrequenties waarbij metingen dus kort na elkaar plaatsvinden. Een belangrijke statistische grootheid voor de kwantificering van autocorrelatie is de (auto)correlatiecoëfficiënt $\rho_{(k)}$. Deze coëfficiënt is een maat voor het verband dat er bestaat tussen de oorspronkelijke meetreeks en dezelfde meetreeks die k intervallen/perioden in de tijd is verschoven (x_1 en x_{1+k} , x_2 en x_{2+k} , ..., x_{n-k} en x_n), en wordt daarom ook wel de lag(k) autocorrelatiecoëfficiënt ($\rho_{(k)}$) genoemd.

In het hierna volgende worden drie methoden nader toegelicht. Methode 1 is de standaard methode. In methode 2 wordt de autocorrelatiecoëfficiënt gecorrigeerd voor het aantal lag(k) waarvoor de coëfficiënt is berekend. In methode 3, ook wel Quennouilles methode voor bias-reductie of jackknife schatting genoemd, wordt de tijdreeks in tweeën gedeeld en wordt de autocorrelatiewaarde geschat voor de deelreeksen en voor de totale reeks. Het voordeel van deze methode is dat de bias afneemt. Bovendien kan door de autocorrelatiefuncties van de twee deelreeksen met elkaar te vergelijken inzicht verkregen worden in de stationariteit (dat wil zeggen de ontwikkeling van de autocorrelatiecoëfficiënt in de tijd) van de meetreeks.

4.4.2.2 TOEPASBAARHEID EN BIJZONDERHEDEN

Evenals voor de Runs toets zijn de voorwaarden die aan de dataset worden gesteld afhankelijk van het doel waarvoor de toets wordt uitgevoerd. In algemene zin kan met behulp van de autocorrelatiecoëfficiënten de aanwezigheid van elke vorm van (seriële) correlatie worden aangetoond. Als er trend of periodiciteit in de te onderzoeken dataset aanwezig is, dan kan die hiermee worden aangetoond.

De autocorrelatiecoëfficiënten kunnen ook berekend worden om de afhankelijkheid in de meetreeks aan te tonen. Wanneer dit de doelstelling is om deze toets toe te passen, dienen eerst alle bekende bronnen van correlatie te zijn verwijderd, te weten (stap)trend en seizoensinvloeden. In het kader van dit hoofdstuk (en de hoofdstukken 6 en 7) wordt de autocorrelatiecoëfficiënten berekend met als doel het aantonen van afhankelijkheid in een dataset. Derhalve wordt er van uitgegaan dat de dataset vrij is van trend en seizoensinvloeden (hoewel dit geen eis voor de toets zelf is).

Methode 3 is gevoelig voor veranderingen in het gemiddelde omdat r_{k1} , r_{k2} en r_k onderling vergeleken worden.

Voor de berekening van de autocorrelatiecoëfficiënten worden de volgende randvoorwaarden aan de dataset gesteld:

- de dataset is normaal verdeeld;
- de meetreeks is equidistant;
- geen ontbrekende gegevens in de meetreeks.

4.4.2.3 TOETS OP SIGNIFICANTIE

Bij benadering geldt dat het 95% betrouwbaarheidsinterval rond $0 \pm 2/\sqrt{N}$ is. Waarden van r_k die buiten deze grenzen vallen zijn significant verschillend van 0. Bij een betrouwbaarheid van 95% verwacht men 1 significante waarde op 20 correlatiecoëfficiënten. In de regel wordt dit als aanvaardbaar beschouwd. Bij de interpretatie van correllogrammen moet daarom rekening gehouden worden met de grootte van de coëfficiënten, maar ook met de fysieke betekenis van een correlatie bij lag(k).

4.4.2.4 FORMULES

Methode 1:

$$c_k = \frac{1}{N} \sum_{t=1}^{N-k} (x_t - \bar{X})(x_{t+k} - \bar{X}) \quad (36)$$

$$c_0 = \frac{1}{N} \sum_{t=1}^{N-k} (x_t - \bar{X})^2 \quad (37)$$

$$r_k = \frac{c_k}{c_0} \quad (38)$$

Hierin is:

r_k	de autocorrelatiecoëfficiënt voor lag(k)
c_k	de autocovariantie bij lag(k)
c_0	de variantie bij lag(k)
N	het aantal meetwaarden
x_t, x_{t+k}	meetwaarde op tijdstip $t, t+k$
$\bar{X}$	het gemiddelde van alle meetwaarden

Methode 2:

In formules (36) en (37) wordt de term $1/N$ vervangen door $1/(N-k)$

Methode 3:

$$\tilde{r}_k = 2r_k - \frac{1}{2}(r_{k1} + r_{k2}) \quad (39)$$

Hierin is:

$\tilde{r}_k$	de gecorrigeerde autocorrelatiecoëfficiënt voor lag(k)
r_k	de autocorrelatiecoëfficiënt voor lag(k) voor de gehele reeks
r_{k1}, r_{k2}	de autocorrelatiecoëfficiënt voor lag(k) voor de deelreeksen 1 en 2

4.4.2.5 STAPPENPLAN

Methode 1:

Stap 1: Bereken het gemiddelde van de dataset (§ 3.1).

Stap 2: Bepaal het aantal lag(k) waarover de autocorrelatiecoëfficiënt moet worden berekend.

Stap 3: Bereken de lag(k)-correlatiecoëfficiënt volgens de formules (36), (37) en (38).

Methode 2:

Zie methode 1 en vervang in de formules (36) en (37) de term $1/N$ door $1/(N-k)$.

Methode 3:

Stap 1: Bereken r_k , volgens methode 1 voor de gehele datareeks.

Stap 2: Deel de dataset in twee delen en bereken voor iedere deelreeks de autocorrelatiecoëfficiënt (r_{k1} en r_{k2}) volgens methode 1.

Stap 3: Bereken de gecorrigeerde autocorrelatiecoëfficiënt volgens formule (39).

4.4.3 BEREKENEN VAN HOGERE LAG(K)-AUTOCORRELATIE COËFFICIËNTEN UIT DE LAG(1)-AUTOCORRELATIECOËFFICIËNT

4.4.3.1 INLEIDING

Aangenomen dat er sprake is van een eerste orde autoregressief (AR(1)), kan de autocorrelatiecoëfficiënt voor lag(k) berekend worden uit de autocorrelatiecoëfficiënt lag(1) van de oorspronkelijke meetreeks.

4.4.3.2 TOEPASBAARHEID EN BIJZONDERHEDEN

Voor het berekenen van de hogere orden van de autocorrelatiecoëfficiënten ($\rho_{(k)}$) worden geen randvoorwaarden aan de dataset gesteld.

4.4.3.3 FORMULES

De lag(k) wordt uit lag(1) berekend volgens:

$$\rho_{(k)} = \rho_{(1)}^k \quad (40)$$

Hierin is:

$\rho_{(1)}$ autocorrelatiecoëfficiënt voor lag(1)

$\rho_{(k)}$ autocorrelatiecoëfficiënt voor lag(k)

k lag waarover de autocorrelatiecoëfficiënt berekend moet worden

4.4.3.4 STAPPENPLAN

Stap 1: Bereken de lag(1)-autocorrelatiecoëfficiënt volgens § 4.4.2.

Stap 2: De nieuwe lag(k)-autocorrelatiecoëfficiënt kan nu volgens formule (40) worden berekend.

4.4.4 EFFECTIEVE AANTAL METINGEN EN AUTOCORRELATIE

4.4.4.1 INLEIDING

In voorkomende gevallen maakt autocorrelatie dat metingen minder 'effectief' zijn, met andere woorden: op grond van onderling onafhankelijke metingen had eenzelfde resultaat kunnen worden bereikt met een geringere meetinspanning. Onafhankelijke monsters zijn per definitie autocorrelatievrij. Naarmate er sprake is van meer autocorrelatie, neemt het tijdsinterval tussen twee opeenvolgende onafhankelijke monsters toe.

4.4.4.2 TOEPASBAARHEID EN BIJZONDERHEDEN

Voor het berekenen van het aantal onafhankelijk meetwaarden, dient de meetreeks equidistant en de residuen normaal verdeeld te zijn.

4.4.4.3 FORMULES

Het aantal onafhankelijke monsters kan met behulp van onderstaande formule worden berekend (Bayley en Hammersley, 1946):

$$\frac{1}{N^*} = \frac{1}{N} + \frac{2}{N^2} \frac{\rho^{N+1} - N\rho^2 + (N-1)\rho}{(\rho-1)^2} \quad (41)$$

Hierin is:

N^* aantal onafhankelijke monsters

N aantal monsters in de meetreeks

ρ correlatiecoëfficiënt tussen oorspronkelijke meetreeks en de meetreeks die $1 \times$ de tijdsafstand tussen 2 opeenvolgende waarnemingen is verschoven ten opzichte van de oorspronkelijke meetreeks (lag1)

4.4.4.4 STAPPENPLAN

Het aantal onafhankelijke meetwaarden kan op onderstaande wijze uit het werkelijke aantal meetwaarden worden berekend.

Stap 1: De data moeten equidistant en te paren zijn.

Stap 2: Bereken de lag(1)-autocorrelatiecoëfficiënt volgens § 4.4.2.

Stap 3: Gegeven een meetreeks kan het aantal onafhankelijke waarnemingen N^* worden geschat met behulp van formule (41).

5 ANALYSE VAN ACTUELE WATERKWALITEIT EN NORMTOETSING

5.1 BETROUWBAARHEIDSINTERVAL GEMIDDELDE

Wanneer het gemiddelde van een dataset is berekend, dan is het gebruikelijk om een uitspraak over de betrouwbaarheid van het berekende gemiddelde te kunnen doen. De grootte van het betrouwbaarheidsinterval rondom het gemiddelde wordt bepaald door de volgende factoren:

- de grootte van de betrouwbaarheid die men aan het gemiddelde oplegt: een hogere betrouwbaarheid (b.v. 99% i.p.v. 95%) betekent dat het interval groter wordt;
- de grootte van de standaarddeviatie (s of σ): een grotere standaarddeviatie leidt tot een groter betrouwbaarheidsinterval;
- de steekproefomvang: een grotere steekproef (aantal meetwaarden) betekent een kleiner interval.

Het betrouwbaarheidsinterval wordt berekend volgens:

$$\mu = \bar{X} \pm Z_{(1-\frac{\alpha}{2})} \times \frac{\sigma}{\sqrt{N}} \quad \text{wanneer } \sigma \text{ bekend is} \quad (42)$$

$$\mu = \bar{X} \pm t_{(N-1, 1-\frac{\alpha}{2})} \times \frac{s}{\sqrt{N}} \quad \text{wanneer } \sigma \text{ onbekend is en op basis van de data wordt geschat} \quad (43)$$

Hierin is:

μ	populatiegemiddelde
$\bar{X}$	steekproefgemiddelde (berekende gemiddelde)
σ	populatie-standaarddeviatie
s	steekproefstandaarddeviatie
N	aantal meetwaarden
$Z_{(1-\frac{\alpha}{2})}$	de kritieke waarde van de normale verdeling bij een gegeven onbetrouwbaarheidsniveau α
$t_{(N-1, 1-\frac{\alpha}{2})}$	de kritieke waarde van de Student t -verdeling bij een gegeven onbetrouwbaarheidsniveau α

Als de populatie-standaarddeviatie σ bekend is, wordt het betrouwbaarheidsinterval voor het gemiddelde op de volgende wijze berekend:

- Stap 1: Bereken het (steekproef)gemiddelde van de dataset met behulp van formule (4).
- Stap 2: Lees in een tabel voor (rechter)overschrijdingskansen voor de normale verdeling de waarde $Z_{(1-\frac{\alpha}{2})}$ af die hoort bij het gewenste onbetrouwbaarheidsniveau α .
- Stap 3: Bereken het betrouwbaarheidsinterval volgens formule (42).

Indien de populatie-standaarddeviatie σ niet bekend is en op basis van de data wordt geschat, wordt het betrouwbaarheidsinterval voor het gemiddelde berekend volgens het onderstaande stappenplan:

- Stap 1: Bereken het (steekproef)gemiddelde van de dataset met behulp van formule (4).
- Stap 2: Bereken de (steekproef)standaarddeviatie van de dataset volgens § 3.4.

- Stap 3: Lees in een tabel voor (rechter)overschrijdingskansen voor de Student t-verdeling de waarde $t_{(N-1, 1-\frac{1}{2}\alpha)}$ af die hoort bij het gewenste onbetrouwbaarheidsniveau α en het aantal meetwaarden minus 1 (N-1) in de dataset.
- Stap 4: Bereken het betrouwbaarheidsinterval volgens formule (43).

5.2 BETROUWBAARHEIDSINTERVAL MEDIAAN

Evenals voor de variantie en voor het gemiddelde kan ook voor de mediaan van een dataset een betrouwbaarheidsinterval worden berekend. Aangezien de mediaan meestal gebruikt wordt als alternatief voor het gemiddelde indien de dataset niet normaal verdeeld is, wordt het betrouwbaarheidsinterval voor de mediaan met behulp van een op de binominale kansverdeling gebaseerde methode berekend (Cochran, 1953; Baggelaar et al., 1995).

De basisformule voor deze methode is:

$$K[c|(N; P)] = \frac{N!}{c!(N-c)!} P^c (1-P)^{N-c} \quad (44)$$

$$\left(\sum_{i=0}^{l-1} K[c|(N; P)] \right) \leq \frac{1}{2}\alpha \quad (45)$$

$$\left(\sum_{i=u+1}^N K[c|(N; P)] \right) \leq \frac{1}{2}\alpha \quad (46)$$

Hierin is:

$K[c (N,P)]$	de kans (in procenten) om c overschrijdingen van de waarde P aan te treffen in een steekproef van N meetwaarden
N	het aantal meetwaarden
P	fractie (percentage) overschrijding, omdat het hier de mediaan betreft is P gelijk aan 0.5 .
c	het aantal overschrijdingen van P
l	rangnummer van de ondergrens van het betrouwbaarheidsinterval bij een onbetrouwbaarheidsniveau α .
u	rangnummer van de bovengrens van het betrouwbaarheidsinterval bij een onbetrouwbaarheidsniveau α

De berekening van het betrouwbaarheidsinterval voor de mediaan volgens deze methode wordt met behulp van onderstaand stappenplan uitgevoerd.

- Stap 1: Rank de meetreeks volgens § 3.10.
- Stap 2: Stel het gewenste onbetrouwbaarheidsniveau α vast.
- Stap 3: Bepaal met behulp van de formules (44) en (45) het rangnummer l voor de ondergrens van het betrouwbaarheidsinterval. De ondergrens wordt derhalve de l^e meetwaarde in de meetreeks.
- Stap 4: Bepaal met behulp van de formules (44) en (46) het rangnummer u voor de bovengrens. De bovengrens van het betrouwbaarheidsinterval is de u^e meetwaarde in de meetreeks.

5.3 BETROUWBAARHEIDSINTERVAL VARIANTIE

Wanneer de variantie van een dataset is berekend, dan kan het betrouwbaarheidsinterval van de variantie worden berekend. De grootte van dit interval wordt bepaald door de volgende factoren:

- de grootte van de betrouwbaarheid die men aan de variantie oplegt: een hogere betrouwbaarheid (bijv. 99% i.p.v. 95%) betekent dat het interval groter wordt;
- de steekproefomvang.

Het betrouwbaarheidsinterval van de variantie wordt berekend op basis van de χ^2 -verdeling (§ 2.1). Deze verdeling is asymmetrisch. Dit betekent dat beide grenzen van het betrouwbaarheidsinterval van de variantie afzonderlijk dienen te worden berekend (op basis van $\chi^2_{(N-1, \frac{1}{2}\alpha)}$ voor de ondergrens en $\chi^2_{(N-1, 1-\frac{1}{2}\alpha)}$ voor de bovengrens van het interval).

Een betrouwbaarheidsinterval bij betrouwbaarheid α voor de variantie σ^2 van een univariate normale verdeling met onbekend gemiddelde wordt gegeven door:

$$s^2 - \frac{(N-1)s^2}{\chi^2_{(N-1, \frac{1}{2}\alpha)}} \text{ voor de ondergrens} \quad (47)$$

$$s^2 + \frac{(N-1)s^2}{\chi^2_{(N-1, 1-\frac{1}{2}\alpha)}} \text{ voor de bovengrens} \quad (48)$$

Hierin is:

s^2 steekproefvariantie, schatter voor de populatievariantie ρ^2

N aantal meetwaarden

$\chi^2_{(N-1, \frac{1}{2}\alpha)}$ de kritieke waarde aan de linkerkant van de χ^2 -verdeling bij een gegeven onbetrouwbaarheidsniveau α en $N-1$ vrijheidsgraden

$\chi^2_{(N-1, 1-\frac{1}{2}\alpha)}$ de kritieke waarde aan de rechterkant van de χ^2 -verdeling bij een gegeven onbetrouwbaarheidsniveau α en $N-1$ vrijheidsgraden

De berekening van het betrouwbaarheidsinterval voor de variantie wordt volgens onderstaand stappenplan uitgevoerd.

Stap 1: Bereken de variantie van de dataset met behulp van formule (4).

Stap 2: Lees in een tabel voor overschrijdingskansen voor de χ^2 -verdeling de waarden voor $\chi^2_{(N-1, \frac{1}{2}\alpha)}$ en $\chi^2_{(N-1, 1-\frac{1}{2}\alpha)}$ af die horen bij het gewenste onbetrouwbaarheidsniveau α .

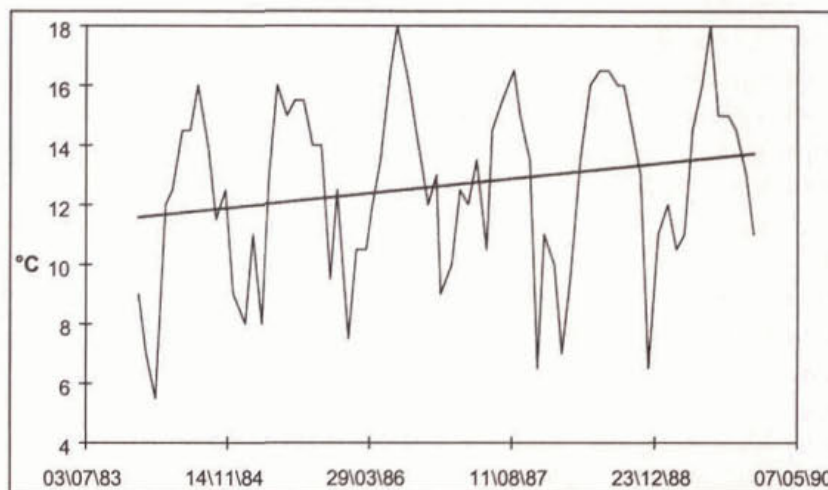
Stap 3: Bereken het betrouwbaarheidsinterval volgens de formules (47) en (48).

6 ANALYSE VAN AUTONOME MONOTONE ONTWIKKELINGEN IN DE WATER-KWALITEIT: TREND

Trend is een (semi)permanente verandering van het gemiddelde van de meetwaarden van een waterkwaliteitsvariabele over een periode van tenminste enkele jaren. Daartoe worden dus niet de veranderingen gerekend, die samenhangen met jaarlijkse seizoenseffecten of abrupte en kortdurende veranderingen, die het gevolg zijn van calamiteiten.

Er is sprake van een monotone lineaire trend in een

tijdreeks indien de waarnemingen in de reeks continu in de tijd veranderen, zoals geïllustreerd is in Figuur 6-1. In het kader van een historische analyse evalueert men in het algemeen de trend in een langjarige meetreeks (5-10 jaar).



Figuur 6-1: Voorbeeld van een monotone trend

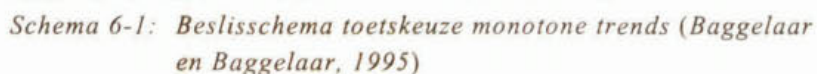
Varianties in de hydrologische omstandigheden kunnen, indien daar geen rekening mee wordt gehouden, de langjarige trenddetectie verstoren. Een trend in de concentratie in een stromend systeem wordt veelal automatisch geassocieerd met een trend in de vrucht. Dit geldt echter alleen als er geen relatie bestaat tussen de concentratie en het debiet en bovendien wanneer ook rekening gehouden wordt met de mogelijk verschillende seizoensinvloed op concentratie en debiet. Aangezien aan deze randvoorwaarden in stromende systemen in het algemeen niet voldaan zal worden, dient voor de invloed van de hydrologie gecorrigeerd te worden. Hoe deze correctie plaats vindt is afhankelijk van de situatie ter plaatse. Het meest voor de hand ligt een transformatie naar momentane vruchten (debiet $\times$ concentratie). Dit houdt automatisch in dat debietmetingen beschikbaar moeten zijn. Bij steekmonsters zal daarom ook een schatting van het debiet gemaakt dienen te worden.

Ook voor (semi-)stagnante systemen, die sterk beïnvloed worden door regenval, moet rekening gehouden worden met de hydrologie. Hierbij gaat het met name om verdunning of afspoeling. Voor de data-analyse op de lange termijn is het zinvol een notitie met betrekking tot de situatie ten tijde van de monsternamen beschikbaar te hebben.

De in dit rapport genoemde methoden voor trenddetectie hebben stevast betrekking op univariate reeksen. De interpretatie van de resultaten kan door het grote aantal variabelen een lastige klus zijn. Om een duidelijker beeld te krijgen van de oorzaken van eventuele trends kan gebruik gemaakt worden van berekende variabelen (indices). Voorbeelden hiervan zijn factorscores van factoranalyses, chloride-sulfaat ratio en de fosfaat-stikstof ratio.

Als de residuen van een langjarige meetreeks normaal verdeeld zijn, kan de aanwezigheid en grootte van de trend worden berekend met behulp van de kleinste kwadraten methode (§ 6.1). In een periodiciteitsvrije (zonder seizoensinvloeden), niet-normaal verdeelde meetreeks kan de hellingshoek van de trend berekend worden met behulp van de 'Sen Estimator of Slope' (§ 6.2). Indien in een meetreeks periodiciteit aanwezig is, is de 'Seasonal Kendall Slope Estimator' (§ 6.3) de aangewezen methode waarmee de aanwezigheid en grootte van de trend kan worden berekend.

De in het schema genoemde toetsen voor het aantonen van trend worden in de hierna volgende paragrafen toegelicht. Zijn de meetwaarden in de dataset - na verwijderen van periodiciteit (§ 3.11) - normaal verdeeld en onafhankelijk, dan kan de aanwezigheid van de trend worden aangetoond met behulp van de correlatiecoëfficiënt van Pearson (§ 6.4). Indien de meetreeks niet normaal verdeeld is en er geen periodiciteit aanwezig is, dan kan de aanwezigheid van



58

6.1 BEREKENING TREND MET BEHULP VAN HET KLEINSTE KWADRATEN CRITERIUM

6.1.1 INLEIDING

Met behulp van het kleinste kwadraten criterium kan de grootte van de trend en de significantie hiervan worden berekend.

6.1.2 TOEPASBAARHEID EN BIJZONDERHEDEN

De kleinste kwadraten methode kan worden toegepast onder voorwaarde dat er sprake is van een lineair verband in de tijd. Dit kan worden aangetoond met behulp van de correlatiecoëfficiënt van Pearson (§ 6.4).

Voor de kleinste kwadraten methode geldt dat de residuen normaal verdeeld zijn, dat de meetwaarden onafhankelijk zijn (geen seriële correlatie in de dataset) en dat de variantie homogeen is. Bekende bronnen van variantie, zoals seizoenseffecten, dienen uit de meetreeks verwijderd te zijn.

Voor het vaststellen van de significantie van de hellingshoek van de trend worden de volgende randvoorwaarden gesteld:

- de residuen van de meetreeks zijn normaal verdeeld;
- de variantie van de residuen verandert niet in de tijd;
- de residuen van de meetreeks zijn onderling onafhankelijk.

6.1.3 HYPOTHESE

Bij de kleinste kwadratenmethode wordt de hypothese getoetst of de hellingshoek, dat wil zeggen de (populatie) regressiecoëfficiënt β_1 , gelijk is aan 0:

$$H_0 : \beta_1 = 0;$$

$$H_A : \beta_1 \neq 0.$$

6.1.4 TOETSINGSGROOTHEID EN FORMULES

De steekproef regressiecoëfficiënt b_1 en toetsingsgrootheid t worden met behulp van onderstaande formules berekend:

$$b_1 = \frac{s_{xy}}{s_x^2} \quad (49)$$

$$t = \frac{b_1}{s_b} \quad (50)$$

$$s_b = \frac{s}{\sqrt{\sum_{i=1}^N (x_i - \bar{X})^2}} \quad (51)$$

$$s = \sqrt{\frac{\left[\sum_{i=1}^N (y_i - \bar{Y})^2 \right] - b_1 \times \left[\sum_{i=1}^N (x_i - \bar{X})(y_i - \bar{Y}) \right]}{N - 2}} \quad (52)$$

Hierin is:

b_1	<i>schatter voor de populatie regressiecoëfficiënt β_1, oftewel de steekproef regressiecoëfficiënt</i>
t	<i>toetsingsgrootheid voor de populatie regressiecoëfficiënt</i>
s_x	<i>standaarddeviatie voor de x waarden</i>
s_{xy}	<i>covariantie tussen de x en y waarden</i>
x_i en y_i	<i>individuele x en y meetwaarden, waarbij x_i de datum is behorende bij meetwaarde y_i</i>
s_b	<i>standaardfout van b_1</i>
$\bar{X}$ en $\bar{Y}$	<i>gemiddelden van respectievelijk de x en y waarden</i>
N	<i>totaal aantal paren bij elkaar horende x en y waarden</i>

De toetsingsgrootheid t volgt een Student's t-verdeling met $N-2$ vrijheidsgraden. De kritieke waarde bij een onbetrouwbaarheidsniveau α wordt in een tabel met (rechter) overschrijdingskansen voor een t-verdeling afgelezen. De H_0 -hypothese ($\beta_1=0$) wordt geaccepteerd wanneer $|t| < t_{(N-2, 1-\frac{1}{2}\alpha)}$.

6.1.5 STAPPENPLAN UITVOERING TOETS

Stap 1:	Bereken de variantie s_x^2 van de x waarden zoals beschreven in § 3.3.
Stap 2:	Bereken de covariantie van de x en y waarden volgens § 3.5.
Stap 3:	De (steekproef) regressiecoëfficiënt b_1 wordt verkregen door de covariantie te delen door de variantie van x volgens formule (49).
Stap 4:	De standaardfout s_b wordt berekend met behulp van de formules (51) en (52).
Stap 5:	De toetsingsgrootheid t wordt berekend door het resultaat van stap 3 te delen door het resultaat van stap 4 (formule (50)).
Stap 6:	De H_0 -hypothese ($\beta_1=0$: de hellingshoek van de trend is nul) wordt verworpen wanneer de toetsingsgrootheid t groter is dan of gelijk is aan de kritieke waarde bij een gegeven onbetrouwbaarheidsniveau α , dat wil zeggen wanneer $ t \geq t_{(N-2, 1-\frac{1}{2}\alpha)}$.

6.1.6 REKENVOORBEELD (CASE)

Case: Berekenen hellingshoek van de trend met behulp van de kleinste kwadraten methode.

Data: Neerbeek Limburg, cadmium van 19-01-1983 t/m 04-12-1996; zie ook § 6.8.6 (*case* Seasonal Kendall II toets voor trend).

Het cadmium gehalte van de Neerbeek in Limburg neemt tussen 1983 en 1996 af. Met behulp van de kleinste kwadratenmethode wordt de grootte van de trend berekend. In deze dataset is periodiciteit aangetoond.

De dataset is gecontroleerd of deze voldoet aan de overige randvoorwaarden, te weten normaliteit, homogeniteit van de variantie en onafhankelijkheid van de residuen. Voor de resultaten van deze toetsen zie § 6.4.6.

Voor het toepassen van de kleinste kwadratenmethode is in dit voorbeeld, ondanks het feit dat de dataset niet aan alle randvoorwaarden voldoet, gebruik gemaakt van de ruwe data (in de praktijk dienen seizoensinvloeden verwijderd te worden voordat de trend met deze methode wordt berekend). De onderhavige *case* dient derhalve als rekenvoorbeeld beschouwd te worden.

De meetwaarden op detectieniveau zijn in dit voorbeeld vervangen door de detectielimiet zelf (de conversiefactor is dus een). Aan de datum van de meetwaarden is een dagnummer toegekend waarbij nummer 1 staat voor 1 januari 1983. De meetdatum wordt dus getransformeerd naar het aantal dagen vanaf 1 januari 1983 (de datum van de eerste meetwaarde, 19 januari, wordt dus 19 en de datum van de laatste meetwaarde, 4 december 1996 wordt 5087). De dagnummers van de waarnemingen worden nu steekproef x en de meetwaarden zelf worden steekproef y . De hellingshoek van de trend wordt berekend tussen de steekproeven x en y .

Stap 1: Standaarddeviaties (§ 3.4) van de steekproef x : $s_x=1535$

Stap 2: Covariantie van steekproeven x en y (§ 3.5): $s_{xy}=546.2$

Stap 3: De (steekproef)regressiecoëfficiënt wordt nu: $b_1=546.2/1535=-0.00023$

Stap 4: De standaardfout s_b wordt nu: $s=\sqrt{[(65.63778-0.00023 \times 45878.7)/(84-2)]}=0.819036$

$$s_b=0.819036/\sqrt{3926578}=5.86E-05$$

Stap 5: Na standaardisatie wordt de toetsingsgrootte, waarbij $N=84$: $t=-0.00023/-1.7E-08=-3.95708$.

Stap 6: De kritieke waarde van de t -verdeling voor een onbetrouwbaarheidsniveau $\alpha=0.05$ en het aantal vrijheidsgraden $df=N-2=82$: $t_{(1-\alpha/2)}=1.989$.

H_0 wordt verworpen indien $|t| \geq 1.989$. H_0 wordt verworpen, de (steekproef)regressiecoëfficiënt is niet gelijk aan nul: $b_1 \neq 0$.

6.2 SEN NONPARAMETRIC ESTIMATOR OF SLOPE

6.2.1 INLEIDING

De Sen Slope Estimator is een non-parametrische methode om de grootte van een trend te berekenen. Met deze methode kan tevens het betrouwbaarheidsinterval van de trend bij een gegeven betrouwbaarheidsniveau $(1-\alpha)$ worden berekend.

6.2.2 TOEPASBAARHEID EN BIJZONDERHEDEN

De Sen Slope Estimator is ongevoelig voor ontbrekende waarden en uitbijters (§ 3.7). De data hoeven niet te voldoen aan een specifieke verdeling. Voor het vaststellen van het betrouwbaarheidsinterval van de trend zijn tenminste 10 meetwaarden nodig bij een 90% betrouwbaarheidsinterval en tenminste 100 meetwaarden bij een 99% betrouwbaarheidsinterval.

Voor waarden lager of gelijk aan de detectielimiet, wordt geadviseerd deze door de halve detectielimiet te vervangen (§ 3.6).

De berekening van de Sen Slope Estimator wordt in het algemeen uitgevoerd op een dataset waaruit de seizoensinvloeden zijn verwijderd.

Voor de berekening van de trend met behulp van de Sen Slope Estimator worden geen randvoorwaarden aan de dataset gesteld. Wanneer seizoensinvloeden in de meetreeks aanwezig zijn wordt de Seasonal Kendall Slope Estimator aanbevolen (§ 6.3).

6.2.3 FORMULES

De Sen Slope Estimator wordt berekend met behulp van de volgende formules:

$$Q_i = \frac{x_{i'} - x_i}{i' - i} \quad \text{waarbij } i' > i \quad (53)$$

$$Q = \text{mediaan van } Q_i \quad (54)$$

$$\text{waarbij} \quad Q = Q_{[\frac{1}{2}(N'+1)]} \quad \text{wanneer } N' \text{ oneven is}$$

$$Q = \frac{1}{2}(Q_{[\frac{1}{2}N']} + Q_{[\frac{1}{2}(N'+2)]}) \quad \text{wanneer } N' \text{ even is}$$

$$Q_l = \frac{N' - (Z_{(1-\frac{1}{2}\alpha)} \times \sqrt{\text{VAR}(S)})}{2} \quad (55)$$

$$Q_u = \frac{[N' + (Z_{(1-\frac{1}{2}\alpha)} \times \sqrt{\text{VAR}(S)})]}{2} + 1$$

Hierin is:

Q_i berekende helling tussen 2 meetwaarden

Q totale trend in dataset: mediaan van alle Q_i

i en i' indexnummer voor meetperioden

x_{ij}, x_{ik} meetwaarden in seizoen I met volgnummers i en k , waarbij $i < k$

N totaal aantal meetwaarden

N' aantal trendschattingen Q_i

Q_l de ondergrens van het betrouwbaarheidsinterval van de trend zijnde de schatter Q_i voor de trend met volgnummer $i=l$

Q_u de bovengrens van het betrouwbaarheidsinterval van de trend zijnde de schatter Q_i voor de trend met volgnummer $i=u$

$Z_{(1-\frac{1}{2}\alpha)}$ kritieke waarde van de standaard normale verdeling bij een onbetrouwbaarheidsniveau α

6.2.4 STAPPENPLAN

Stap 1: Met behulp van formule (53) worden van alle mogelijke metingen de trend bepaald, hetgeen resulteert in N' trendschattingen. Wanneer per meetperiode één meting beschikbaar is, dan is N' gelijk aan $\frac{1}{2}(N(N-1))$. Wanneer in één of meer meetperioden meerdere metingen beschikbaar zijn, dan kan de trend tussen de metingen in de zelfde meetperiode niet berekend worden omdat i' en i aan elkaar gelijk zijn. In deze situaties is $N' < \frac{1}{2}(N(N-1))$.

Stap 2: Vervolgens worden de N' trendschattingen van groot naar klein gerangschikt, en voorzien van een volgnummer: Q_1 voor de kleinste waarde en $Q_{N'}$ voor de grootste.

Stap 3: De waarde voor de Sen Slope Estimator is de mediaan van deze Q's, berekend volgens formule (54).

Het betrouwbaarheidsinterval van de trend kan voor een gegeven onbetrouwbaarheidsniveau α als volgt worden berekend:

Stap 1: Bereken $VAR(S)$ volgens formule (66) (§ 6.6.4).

Stap 2: Kies het gewenste onbetrouwbaarheidsniveau α en zoek de hierbij behorende waarde voor $Z_{(1-\frac{1}{2}\alpha)}$ op in een tabel voor de cumulatieve standaard normale verdeling.

Stap 3: Het betrouwbaarheidsinterval van de berekende trend Q is gedefinieerd volgens formule (55).

6.2.5 REKENVOORBEELD (CASE)

Case: Berekenen hellingshoek en betrouwbaarheidsinterval van de trend met behulp van de Sen Slope Estimator.

Data: Neerbeek Limburg, cadmium van 19-011-983 t/m 04-12-1996; zie ook § 6.8.6 (*case* Seasonal Kendall II toets voor trend).

Het cadmium gehalte van de Neerbeek in Limburg neemt tussen 1983 en 1996 af. Met behulp van de Sen Slope Estimator wordt de hellingshoek van de trend berekend en het betrouwbaarheidsinterval van de trend. In deze dataset is periodiciteit aangetoond (§ 6.4.6). Feitelijk dient dus om deze reden de Seasonal Kendall Slope Estimator (§ 6.3) toegepast te worden. In dit voorbeeld is de Sen Slope Estimator toegepast op de meetwaarden van het eerste kwartaal van alle in de dataset aanwezige meetwaarden. De onderhavige *case* dient derhalve als rekenvoorbeeld beschouwd te worden.

Berekening trend:

Stap 1: Zie Tabel 6-1.

Stap 2: Zie Tabel 6-2

Stap 3: $Q = \text{mediaan}(Q_i) = -0.00026$

Berekening betrouwbaarheidsinterval:

Stap 1: Omdat er voor enkele meetperioden meer dan één meetwaarden aanwezig zijn, dient formule (66) (§ 6.6.4) te worden toegepast voor de berekening van $VAR(S)$:

Stap 2:
$$VAR(S) = \frac{1}{18} \{ 22(22-1)(2 \times 22 + 5) - [2(2-1)(2 \times 2 + 5) + 2(2-1)(2 \times 2 + 5)] - [2(2-1)(2 \times 2 + 5) + 2(2-1)(2 \times 2 + 5) + 2(3-1)(2 \times 3 + 5) + 2(3-1)(2 \times 3 + 5) + 2(3-1)(2 \times 3 + 5)] \} + \frac{1}{1} [(9 \times 22(22-1)(22-2)) \times \{ [2(2-1)(2-2) + 2(2-1)(2-2)] \times [2(2-1)(2-2) + 2(2-1)(2-2) + 2(3-1)(3-2) + 2(3-1)(3-2) + 2(3-1)(3-2)] \} + \frac{1}{1} [2 \times 22(22-1)] \times \{ [2(2-1) + 2(2-1)] \times [2(2-1) + 2(2-1) + 2(3-1) + 2(3-1) + 2(3-1)] \} \}$$

$VAR(S) = 1257$

Stap 3: De kritieke waarde van de Z-verdeling voor een onbetrouwbaarheidsniveau $\alpha = 0.05$

$Z_{(1-\frac{1}{2}\alpha)} = 1.96$.

Q_l waarbij: $l = \frac{1}{2} (221 - (1.96 \times \sqrt{1257})) = 75.75$.

Interpolatie tussen $Q_{75} = -0.00061058$ en $Q_{76} = -0.00059995$ resulteert in een ondergrens $Q_{75.75} = -0.00060260$.

Q_u waarbij: $u = 1 + [\frac{1}{2} (221 + (1.96 \times \sqrt{1257}))] = 146.2$.

Interpolatie tussen $Q_{146} = -0.0000602$ en $Q_{147} = -0.0000598$ resulteert in een bovengrens $Q_{145.2} = -0.0000601$.

Het betrouwbaarheidsintervall wordt nu $Q_l < Q < Q_u \Rightarrow -0.00060260 < Q < -0.0000601$

Tabel 6-1: Meetwaarden, hellingschatters Q_i en overige kengetallen voor de Sen Slope Estimator

		Q _i										
jaar		190183	150384	160185	270186	210187	250287	130188	160389	70290	210390	110391
	waarde	4	1.5	1.5	2.9	1	2.2	2.79	1.7	1.6	1.1	0.95
190183	4											
150384	1.5	-0.006										
160185	1.5	-0.003	0.000									
270186	2.9	-0.001	0.002	0.004								
210187	1	-0.002	0.000	-0.001	-0.005							
250287	2.2	-0.001	0.001	0.001	-0.002							
130188	2.79	-0.001	0.001	0.001	0.000	0.005	0.002					
160389	1.7	-0.001	0.000	0.000	-0.001	0.001	-0.001	-0.003				
70290	1.6	-0.001	0.000	0.000	-0.001	0.001	-0.001	-0.002	0.000			
210390	1.1	-0.001	0.000	0.000	-0.001	0.000	-0.001	-0.002	-0.002	-0.012		
110391	0.95	-0.001	0.000	0.000	-0.001	0.000	-0.001	-0.002	-0.001	-0.002	0.000	
250392	0.97	-0.001	0.000	0.000	-0.001	0.000	-0.001	-0.001	-0.001	-0.001	0.000	0.000
20293	1.8	-0.001	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	-0.001	0.000	0.000	0.001	0.001
140194	2.7	0.000	0.000	0.000	0.000	0.001	0.000	0.000	0.001	0.001	0.001	0.002
220294	1.1	-0.001	0.000	0.000	-0.001	0.000	0.000	-0.001	0.000	0.000	0.000	0.000
140394	1.3	-0.001	0.000	0.000	-0.001	0.000	0.000	-0.001	0.000	0.000	0.000	0.000
240195	2.6	0.000	0.000	0.000	0.000	0.001	0.000	0.000	0.000	0.001	0.001	0.001
150295	2.4	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.001	0.001
220395	0.99	-0.001	0.000	0.000	-0.001	0.000	0.000	-0.001	0.000	0.000	0.000	0.000
160196	0.6	-0.001	0.000	0.000	-0.001	0.000	0.000	-0.001	0.000	0.000	0.000	0.000
270296	0.7	-0.001	0.000	0.000	-0.001	0.000	0.000	-0.001	0.000	0.000	0.000	0.000
250396	0.41	-0.001	0.000	0.000	-0.001	0.000	-0.001	-0.001	-0.001	-0.001	0.000	0.000
		Q _i										
jaar		250392	20293	140194	220294	140394	240195	150295	220395	160196	270296	250396
	waarde	0.97	1.8	2.7	1.1	1.3	2.6	2.4	0.99	0.6	0.7	0.41
190183	4											
150384	1.5											
160185	1.5											
270186	2.9											
210187	1											
250287	2.2											
130188	2.79											
160389	1.7											
70290	1.6											
210390	1.1											
110391	0.95											
250392	0.97											
20293	1.8	0.003										
140194	2.7	0.003	0.003									
220294	1.1	0.000	-0.002									
140394	1.3	0.000	-0.001									
240195	2.6	0.002	0.001	0.000	0.004	0.004						
150295	2.4	0.001	0.001	-0.001	0.004	0.003						
220395	0.99	0.000	-0.001	-0.004	0.000	-0.001						
160196	0.6	0.000	-0.001	-0.003	-0.001	-0.001	-0.006	-0.005	-0.001			
270296	0.7	0.000	-0.001	-0.003	-0.001	-0.001	-0.005	-0.005	-0.001			
250396	0.41	0.000	-0.001	-0.003	-0.001	-0.001	-0.005	-0.005	-0.002			
Mediaan (Q _i)		-0.0003		g		2		h		5		
N		22		t[1]		2		q[1]		2		
N'		221		t[2]		2		q[2]		2		
								q[3]		3		
								q[4]		3		
								q[5]		3		

Tabel 6-2: Hellingschatters Q_i na ranking voor de Sen Slope Estimator

Q_i	rangnr	Q_i	rangnr	Q_i	rangnr	Q_i	rangnr	Q_i	rangnr	Q_i	rangnr
-0.011905	1	-0.000996	41	-0.000540	81	-0.000202	121	0.000069	161	0.000922	201
-0.005938	2	-0.000982	42	-0.000539	82	-0.000201	122	0.000070	162	0.001009	202
-0.005602	3	-0.000982	43	-0.000536	83	-0.000198	123	0.000087	163	0.001110	203
-0.005373	4	-0.000932	44	-0.000532	84	-0.000197	124	0.000092	164	0.001147	204
-0.005292	5	-0.000906	45	-0.000503	85	-0.000188	125	0.000102	165	0.001166	205
-0.005141	6	-0.000904	46	-0.000493	86	-0.000184	126	0.000109	166	0.001181	206
-0.004926	7	-0.000883	47	-0.000480	87	-0.000184	127	0.000115	167	0.001225	207
-0.004762	8	-0.000858	48	-0.000461	88	-0.000183	128	0.000132	168	0.001353	208
-0.004509	9	-0.000848	49	-0.000456	89	-0.000182	129	0.000138	169	0.001575	209
-0.003958	10	-0.000847	50	-0.000441	90	-0.000181	130	0.000138	170	0.001683	210
-0.003434	11	-0.000839	51	-0.000431	91	-0.000177	131	0.000139	171	0.001832	211
-0.002869	12	-0.000831	52	-0.000429	92	-0.000176	132	0.000183	172	0.002050	212
-0.002859	13	-0.000811	53	-0.000423	93	-0.000154	133	0.000186	173	0.002601	213
-0.002584	14	-0.000795	54	-0.000411	94	-0.000151	134	0.000199	174	0.002621	214
-0.002547	15	-0.000757	55	-0.000407	95	-0.000151	135	0.000226	175	0.002643	215
-0.002118	16	-0.000756	56	-0.000394	96	-0.000138	136	0.000244	176	0.003254	216
-0.002051	17	-0.000749	57	-0.000383	97	-0.000137	137	0.000277	177	0.003631	217
-0.001818	18	-0.000746	58	-0.000363	98	-0.000127	138	0.000301	178	0.003723	218
-0.001777	19	-0.000722	59	-0.000350	99	-0.000122	139	0.000318	179	0.004114	219
-0.001637	20	-0.000717	60	-0.000339	100	-0.000120	140	0.000324	180	0.004464	220
-0.001622	21	-0.000716	61	-0.000333	101	-0.000110	141	0.000334	181	0.005014	221
-0.001596	22	-0.000704	62	-0.000326	102	-0.000091	142	0.000363	182		
-0.001574	23	-0.000689	63	-0.000324	103	-0.000090	143	0.000365	183		
-0.001572	24	-0.000686	64	-0.000323	104	-0.000074	144	0.000421	184		
-0.001300	25	-0.000680	65	-0.000319	105	-0.000069	145	0.000436	185		
-0.001235	26	-0.000677	66	-0.000314	106	-0.000060	146	0.000459	186		
-0.001212	27	-0.000671	67	-0.000305	107	-0.000060	147	0.000475	187		
-0.001202	28	-0.000667	68	-0.000293	108	-0.000055	148	0.000539	188		
-0.001199	29	-0.000665	69	-0.000280	109	-0.000041	149	0.000547	189		
-0.001189	30	-0.000663	70	-0.000267	110	-0.000033	150	0.000552	190		
-0.001187	31	-0.000663	71	-0.000267	111	-0.000016	151	0.000567	191		
-0.001113	32	-0.000662	72	-0.000266	112	-0.000003	152	0.000650	192		
-0.001108	33	-0.000661	73	-0.000248	113	0.000000	153	0.000667	193		
-0.001049	34	-0.000632	74	-0.000245	114	0.000000	154	0.000667	194		
-0.001043	35	-0.000611	75	-0.000235	115	0.000018	155	0.000725	195		
-0.001041	36	-0.000600	76	-0.000224	116	0.000027	156	0.000765	196		
-0.001040	37	-0.000597	77	-0.000219	117	0.000039	157	0.000808	197		
-0.001034	38	-0.000572	78	-0.000216	118	0.000046	158	0.000847	198		
-0.001026	39	-0.000557	79	-0.000212	119	0.000053	159	0.000892	199		
-0.001023	40	-0.000544	80	-0.000208	120	0.000054	160	0.000909	200		

6.3 SEASONAL KENDALL SLOPE ESTIMATOR

6.3.1 INLEIDING

Evenals de Sen Slope Estimator is de Seasonal Kendall Slope Estimator een non-parametrische methode om de grootte van de trend te berekenen.

Met deze toets kan tevens het betrouwbaarheidsinterval van de trend bij een gegeven betrouwbaarheidsniveau $(1-\alpha)$ worden berekend.

6.3.2 TOEPASBAARHEID EN BIJZONDERHEDEN

De Seasonal Kendall Slope Estimator is ongevoelig voor ontbrekende waarden en uitschieters en houdt rekening met seizoensinvloeden. De dataset hoeft niet te voldoen aan een specifieke verdeling. Voor waarden lager of gelijk aan de detectielimiet, wordt geadviseerd deze door de halve detectielimiet te vervangen.

Voor de berekening van de trend volgens deze methode worden geen randvoorwaarden aan de meetreeks gesteld.

6.3.3 FORMULES

De Seasonal Kendall Slope Estimator wordt berekend met behulp van de volgende formules:

$$q_i = \frac{x_{il} - x_{ik}}{l - k} \quad \text{waarbij } l > k \quad (56)$$

$$Q_i = \text{mediaan van } q_i \quad (57)$$

$$\text{waarbij} \quad Q_i = q_{[\% (N' + 1)]} \quad \text{wanneer } N' \text{ oneven is}$$

$$Q_i = \frac{1}{2}(q_{[\% N']} + q_{[\% (N' + 2)]}) \quad \text{wanneer } N' \text{ even is}$$

$$Q = \text{mediaan van } Q_i \quad (58)$$

$$\text{waarbij} \quad Q = Q_{[\% (N + 1)]} \quad \text{wanneer } N \text{ oneven is}$$

$$Q = \frac{1}{2}(Q_{[\% N]} + Q_{[\% (N + 2)]}) \quad \text{wanneer } N \text{ even is}$$

$$Q_l = \frac{\left(\sum_{i=1}^k N'_i \right) - \left(Z_{(1-\% \alpha)} \times \sqrt{\text{VAR}(S)} \right)}{2} \quad (59)$$

$$Q_u = \frac{\left(\sum_{i=1}^k N'_i \right) + \left(Z_{(1-\% \alpha)} \times \sqrt{\text{VAR}(S)} \right)}{2} + I$$

Hierin is :

q_i berekende helling tussen 2 meetwaarden in periode (seizoen) i

Q_i trend voor seizoen i = mediaan van alle q_i

Q totale trend in dataset: mediaan van alle Q_i

i indexnummer voor periode (seizoen) i

N totaal aantal meetwaarden in dataset

N_i aantal meetwaarden in periode (seizoen) i

N' aantal waarden Q_i

N'_i aantal waarden q_i

$Z_{(1-\% \alpha)}$ kritieke waarde van de standaard normale verdeling bij een onbetrouwbaarheidsniveau α

6.3.3 STAPPENPLAN

- Stap 1: Met behulp van formule (56) worden voor seizoen i van alle paren van metingen in opeenvolgende jaren de trend bepaald. Wanneer per jaar één meting voor het betreffende seizoen beschikbaar is, dan is N_i' gelijk aan $\frac{1}{2}(N_i(N_i-1))$. Wanneer in één of meer jaren meerdere metingen voor seizoen i beschikbaar zijn, dan kan de trend tussen de metingen in hetzelfde jaar niet berekend worden omdat l en k dan aan elkaar gelijk zijn. In deze situaties is $N_i' < \frac{1}{2}(N_i(N_i-1))$.
- Stap 2: Vervolgens worden de N_i' trendschattingen van groot naar klein gerangschikt, en voorzien van een volgnummer: q_1 voor de kleinste waarde en $q_{N_i'}$ voor de grootste.
- Stap 3: De trend Q_i voor seizoen i is de mediaan van alle trendschattingen in seizoen i (formule (57)).
- Stap 4: Herhaal stap 1 t/m 3 voor alle seizoenen. Over alle jaren en seizoenen worden tezamen $\sum N_i'$ trendschattingen verkregen.
- Stap 5: De waarde voor de Sen Slope Estimator 'Q' is de mediaan van alle Q_i 's, berekend volgens formule (58).

Het betrouwbaarheidsinterval van de trend kan voor een gegeven onbetrouwbaarheidsniveau α als volgt worden berekend:

- Stap 1: Bereken voor elk seizoen i afzonderlijk $VAR(S_i)$ volgens formule (66).
- Stap 2: Bereken $VAR(S)$ volgens formule (69).
- Stap 3: Kies het gewenste onbetrouwbaarheidsniveau α en zoek de hierbij behorende waarde voor $Z_{(1-\frac{1}{2}\alpha)}$ op in een tabel voor de cumulatieve standaard normale verdeling.
- Stap 4: Het betrouwbaarheidsinterval van de berekende trend Q is gedefinieerd volgens formule (59).

6.3.4 REKENVOORBEELD (CASE)

- Case:* Berekenen hellingshoek en betrouwbaarheidsinterval van de trend met behulp van de Seasonal Kendall Slope Estimator.
- Data:* Neerbeek Limburg, cadmium van 19-01-1983 t/m 04-12-1996; zie ook § 6.8.6 (*case* Seasonal Kendall II toets voor trend).

Het cadmium gehalte van de Neerbeek in Limburg neemt tussen 1983 en 1996 af. Met behulp van de Seasonal Kendall Slope Estimator wordt de hellingshoek van de trend berekend en het betrouwbaarheidsinterval van de trend.

Berekening trend:

- Stap 1-3:** Voor het eerste kwartaal zijn de resultaten van de berekeningen van q_i weergegeven in Tabel 6-3. De mediaan Q_i van alle q_i is weergegeven in Tabel 6-4.
- Stap 4-5:** Zie Tabel 6-4. De helling Q van de trend bedraagt:
 $Q = \text{mediaan}(Q_i) = -0.000144 \mu\text{g/l per jaar}$

Berekening betrouwbaarheidsinterval:

- Stap 1:** Omdat er in enkele kwartalen meer dan één meetwaarden aanwezig zijn, dient formule (66) (§ 6.6.4) te worden toegepast voor de berekening van $VAR(S_i)$. De kengetallen voor, de resultaten van en de verschillende tussenresultaten van genoemde formule staan voor elk kwartaal vermeld in Tabel 6-4. Het resultaat $VAR(S)$ voor deze meetreeks wordt: $VAR(S) = 4350$
- Stap 2:** De kritieke waarde van de Z -verdeling voor een onbetrouwbaarheidsniveau $\alpha = 0.05$: $Z_{(1-\frac{1}{2}\alpha)} = 1.96$.

Stap 3: Q_l waarbij $l = \frac{1}{2}(798 - (1.96 \times \sqrt{4350})) = 334.4$.

Interpolatie tussen $q_{334} = -0.000258$ en $q_{335} = -0.000257$ resulteert in een ondergrens $Q_{334.4} = -0.000258$.

Q_u waarbij $u = 1 + [\frac{1}{2}(798 + (1.96 \times \sqrt{4350}))] = 464.6$.

Interpolatie tussen $q_{464} = -0.000093$ en $q_{465} = -0.000091$ resulteert in een bovengrens $Q_{464.6} = -0.000092$.

Het betrouwbaarheidsinterval wordt nu $Q_l < Q < Q_u \Rightarrow -0.000258 < Q < -0.000092$

Tabel 6-3: Tussenresultaten q_i voor de schatting van helling Q_i voor het 1^e kwartaal

Datum		19-01-83	15-03-84	16-01-85	27-01-86	21-01-87	25-02-87	13-01-88	16-03-89	07-02-90	21-03-90	11-03-91
meetw		4.00	1.50	1.50	2.90	1.00	2.20	2.79	1.70	1.60	1.10	0.95
19-01-83	4.00											
15-03-84	1.50	-0.0059										
16-01-85	1.50	-0.0034	0.0000									
27-01-86	2.90	-0.0010	0.0020	0.0037								
21-01-87	1.00	-0.0021	-0.0005	-0.0007	-0.0053							
25-02-87	2.20	-0.0012	0.0006	0.0009	-0.0018							
13-01-88	2.79	-0.0007	0.0009	0.0012	-0.0002	0.0050	0.0018					
16-03-89	1.70	-0.0010	0.0001	0.0001	-0.0010	0.0009	-0.0007	-0.0025				
07-02-90	1.60	-0.0009	0.0000	0.0001	-0.0009	0.0005	-0.0006	-0.0016	-0.0003			
21-03-90	1.10	-0.0011	-0.0002	-0.0002	-0.0012	0.0001	-0.0010	-0.0021	-0.0016			
11-03-91	0.95	-0.0010	-0.0002	-0.0002	-0.0010	0.0000	-0.0008	-0.0016	-0.0010	-0.0016	-0.0004	
25-03-92	0.97	-0.0009	-0.0002	-0.0002	-0.0009	0.0000	-0.0007	-0.0012	-0.0007	-0.0008	-0.0002	0.0001
02-02-93	1.80	-0.0006	0.0001	0.0001	-0.0004	0.0004	-0.0002	-0.0005	0.0001	0.0002	0.0007	0.0012
14-01-94	2.70	-0.0003	0.0003	0.0004	-0.0001	0.0007	0.0002	0.0000	0.0006	0.0008	0.0011	0.0017
22-02-94	1.10	-0.0007	-0.0001	-0.0001	-0.0006	0.0000	-0.0004	-0.0008	-0.0003	-0.0003	0.0000	0.0001
14-03-94	1.30	-0.0007	-0.0001	-0.0001	-0.0005	0.0001	-0.0003	-0.0007	-0.0002	-0.0002	0.0001	0.0003
24-01-95	2.60	-0.0003	0.0003	0.0003	-0.0001	0.0005	0.0001	-0.0001	0.0004	0.0006	0.0008	0.0012
15-02-95	2.40	-0.0004	0.0002	0.0002	-0.0002	0.0005	0.0001	-0.0002	0.0003	0.0004	0.0007	0.0010
22-03-95	0.99	-0.0007	-0.0001	-0.0001	-0.0006	0.0000	-0.0004	-0.0007	-0.0003	-0.0003	-0.0001	0.0000
16-01-96	0.60	-0.0007	-0.0002	-0.0002	-0.0006	-0.0001	-0.0005	-0.0007	-0.0004	-0.0005	-0.0002	-0.0002
27-02-96	0.70	-0.0007	-0.0002	-0.0002	-0.0006	-0.0001	-0.0005	-0.0007	-0.0004	-0.0004	-0.0002	-0.0001
25-03-96	0.41	-0.0007	-0.0002	-0.0003	-0.0007	-0.0002	-0.0005	-0.0008	-0.0005	-0.0005	-0.0003	-0.0003
datum		25-03-92	02-02-93	14-01-94	22-02-94	14-03-94	24-01-95	15-02-95	22-03-95	16-01-96	27-02-96	25-03-96
meetw		0.97	1.80	2.70	1.10	1.30	2.60	2.40	0.99	0.60	0.70	0.41
19-01-83	4.00											
15-03-84	1.50											
16-01-85	1.50											
27-01-86	2.90											
21-01-87	1.00											
25-02-87	2.20											
13-01-88	2.79											
16-03-89	1.70											
07-02-90	1.60											
21-03-90	1.10											
11-03-91	0.95											
25-03-92	0.97											
02-02-93	1.80	0.0026										
14-01-94	2.70	0.0026	0.0026									
22-02-94	1.10	0.0002	-0.0018									
14-03-94	1.30	0.0005	-0.0012									
24-01-95	2.60	0.0016	0.0011	-0.0003	0.0045	0.0041						
15-02-95	2.40	0.0014	0.0008	-0.0008	0.0036	0.0033						
22-03-95	0.99	0.0000	-0.0010	-0.0040	-0.0003	-0.0008						
16-01-96	0.60	-0.0003	-0.0011	-0.0029	-0.0007	-0.0010	-0.0056	-0.0054	-0.0013			
27-02-96	0.70	-0.0002	-0.0010	-0.0026	-0.0005	-0.0008	-0.0048	-0.0045	-0.0008			
25-03-96	0.41	-0.0004	-0.0012	-0.0029	-0.0009	-0.0012	-0.0051	-0.0049	-0.0016			

Tabel 6-4: Tussenresultaten voor het berekenen van de trend m.b.v. de Seasonal Kendall Slope Estimator

Kwartaal	1	2	3	4
Q_i	-0.000266	-0.000114	-0.000175	-0.000110
Q	-0.000144			
N	22	22	20	20
aantal q_i	220	218	180	180
g	2	2	2	2
t_1	2	3	2	2
t_2	2	2	2	2
h	5	4	3	4
u_1	2	2	2	2
u_2	2	3	4	3
u_3	3	4	3	3
u_4	3	3	-	3
u_5	3	-	-	-
$N(N-1)(2N+5)$	22638	22638	17100	17100
$t_{p-1}: t_p(t_p-1)(2t_p+5)$	18	66	18	18
$t_{p-2}: t_p(t_p-1)(2t_p+5)$	18	18	18	18
$\sum_{p=1}^t t_p(t_p-1)(2t_p+5)$	36	84	36	36
$u_{q-1}: u_q(u_q-1)(2u_q+5)$	18	18	18	18
$u_{q-2}: u_q(u_q-1)(2u_q+5)$	18	66	156	66
$u_{q-3}: u_q(u_q-1)(2u_q+5)$	66	156	66	66
$u_{q-4}: u_q(u_q-1)(2u_q+5)$	66	66	0	66
$u_{q-5}: u_q(u_q-1)(2u_q+5)$	66	0	0	0
$\sum_{q=1}^b u_q(u_q-1)(2u_q+5)$	234	306	240	216
$1/(9N(N-1)(N-2))$	1.203E-05	1.203E-05	1.624E-05	1.624E-05
$t_{p-1}: t_p(t_p-1)(t_p-2)$	0	6	0	0
$t_{p-2}: t_p(t_p-1)(t_p-2)$	0	0	0	0
$\sum_{p=1}^t t_p(t_p-1)(t_p-2)$	0	6	0	0
$u_{q-1}: u_q(u_q-1)(u_q-2)$	0	0	0	0
$u_{q-2}: u_q(u_q-1)(u_q-2)$	0	6	24	6
$u_{q-3}: u_q(u_q-1)(u_q-2)$	6	24	6	6
$u_{q-4}: u_q(u_q-1)(u_q-2)$	6	6	0	6
$u_{q-5}: u_q(u_q-1)(u_q-2)$	6	0	0	0
$\sum_{q=1}^b u_q(u_q-1)(u_q-2)$	18	36	30	18
$1/(2N(N-1))$	1.E-03	1.E-03	1.E-03	1.E-03
$t_{p-1}: t_p(t_p-1)$	2	6	2	2
$t_{p-2}: t_p(t_p-1)$	2	2	2	2
$\sum_{p=1}^t t_p(t_p-1)$	4	8	4	4
$u_{q-1}: u_q(u_q-1)$	2	2	2	2
$u_{q-2}: u_q(u_q-1)$	2	6	12	6
$u_{q-3}: u_q(u_q-1)$	6	12	6	6
$u_{q-4}: u_q(u_q-1)$	6	6	0	6
$u_{q-5}: u_q(u_q-1)$	6	0	0	0
$\sum_{q=1}^b u_q(u_q-1)$	22	26	20	20
VAR(S_i)	1242.762	1236.228	934.7719	936.1053
VAR(S)	4349.867			
ondergrens (l)	334.3668	q_{334}		
bovengrens (u)	464.6332	-0.000258		
		q_{464}		
		-0.000093		
Q_i	-0.000258			
Q_a	-0.000092			

6.4 TOETS VOOR TREND: CORRELATIECOËFFIËNT VAN PEARSON

6.4.1 INLEIDING

De correlatiecoëfficiënt is een maat voor de lineaire samenhang tussen twee variabelen. Met andere woorden de correlatiecoëfficiënt meet de spreiding van de waarnemingen rond een rechte lijn, de regressielijn. Indien het verband niet lineair is (de waarnemingen liggen op een kromme), is de correlatiecoëfficiënt geen geschikte maat voor het verband.

De correlatiecoëfficiënt neemt waarden aan tussen -1.0 en +1.0. Er is geen correlatie tussen x en y wanneer de coëfficiënt 0 bedraagt, x en y zijn dan onafhankelijk. Hoe dichter de coëfficiënt bij -1.0 of +1.0 ligt hoe sterker het verband tussen x en y.

Doordat met steekproeven gewerkt wordt, kan de gevonden waarde afwijken van de mate van samenhang in de populatie (ρ =populatie correlatiecoëfficiënt).

Wanneer de waarnemingen niet normaal verdeeld zijn, kan gebruik worden gemaakt van de non-parametrische rangcorrelatiecoëfficiënt van Spearman (§ 6.5).

6.4.2 TOEPASBAARHEID EN BIJZONDERHEDEN

Voor de parametrische correlatiecoëfficiënt van Pearson geldt dat de meetwaarden normaal verdeeld zijn, dat de meetwaarden onafhankelijk zijn (geen seriële correlatie in residuen van de dataset) en dat geen seizoenseffecten in de meetreeks aanwezig zijn.

Voor de berekening van de correlatiecoëfficiënt van Pearson worden de volgende randvoorwaarden aan de dataset gesteld:

- de residuen van de meetreeks zijn normaal verdeeld.

6.4.3 HYPOTHESE

Met een toets kan een uitspraak gedaan worden over de significantie van het verband in de populatie (ρ = populatie correlatiecoëfficiënt):

$$H_0 : \rho = 0;$$

$$H_A : \rho \neq 0.$$

6.4.4 TOETSINGSGROOTHEID, FORMULES EN KRITIEKE WAARDEN

De correlatiecoëfficiënt r en de toetsingsgrootheid t worden als volgt berekend:

$$r = \frac{s_{xy}}{s_x s_y} \quad (60)$$

$$t = r \times \sqrt{\frac{N-2}{1-r^2}} \quad (61)$$

Hierin is:

t	toetsingsgrootheid voor de populatie correlatiecoëfficiënt
r	schatter voor de populatie correlatiecoëfficiënt ρ
s_x en s_y	standaarddeviaties voor respectievelijk de x en y waarden
s_{xy}	covariantie tussen de x en y waarden
x_i en y_i	individuele x en y meetwaarden, waarbij x_i de datum is behorende bij meetwaarde y_i
$\bar{X}$ en $\bar{Y}$	gemiddelden van respectievelijk de x en y waarden
N	totaal aantal paren bij elkaar horende x en y waarden

De toetsingsgrootheid t volgt een Student's t -verdeling met $N-2$ vrijheidsgraden. De kritieke waarde bij het onbetrouwbaarheidsniveau α wordt in een tabel met (rechter) overschrijdingskansen voor een t -verdeling afgelezen. De H_0 -hypothese wordt geaccepteerd wanneer $|t| < t_{(N-2, 1-\frac{1}{2}\alpha)}$.

6.4.5 STAPPENPLAN UITVOERING TOETS

- | |
|---|
| <p>Stap 1: Ken aan de datum van de meetwaarden een dagnummer toe, waarbij nummer 1 staat voor de datum van de eerste waarneming en nummer N voor de laatste meetdatum. De meetdatum wordt getransformeerd naar het aantal dagen vanaf de datum van de eerste meetwaarde. De dagnummers van de waarnemingen worden nu steekproef x en de meetwaarden zelf worden steekproef y.</p> <p>Stap 2: Bereken de standaarddeviaties van de x en y waarden (respectievelijk s_x en s_y; § 3.4).</p> <p>Stap 3: Bereken de covariantie van de x en y waarden volgens § 3.5.</p> <p>Stap 4: De (steekproef)correlatiecoëfficiënt r wordt verkregen door de covariantie te delen door het product van de standaarddeviaties van x en y volgens formule (60).</p> <p>Stap 5: De (steekproef)correlatiecoëfficiënt r wordt vervolgens gestandaardiseerd tot de toetsingsgrootheid t volgens formule (61).</p> <p>Stap 6: De H_0-hypothese wordt verworpen wanneer de kritieke waarde voor $t_{(N-2, 1-\frac{1}{2}\alpha)}$ wordt overschreden.</p> |
|---|

6.4.6 REKENVOORBEELD (CASE)

Case: Berekenen significantie van de trend met behulp van de correlatiecoëfficiënt van Pearson.

Data: Neerbeek Limburg, cadmium van 19-01-1983 t/m 04-12-1996; zie ook § 6.8.6 (case Seasonal Kendall II toets voor trend).

Zoals in Schema 6-1 is aangegeven is voor de keuze van de toe te passen toets uitgegaan van een subset van de ruwe meetreeks, waaruit de trend is verwijderd. In deze subset is vervolgens een significante periodiciteit aangetoond. Vervolgens is een tweede subset gegenereerd is, die vrij is van seizoensinvloeden en trend. In deze tweede subset kan geen autocorrelatie worden aangetoond. Deze subset is echter wel normaal verdeeld.

De toetsresultaten kunnen als volgt worden samengevat:

Sig. trend	Kruskal-Wallis	sig. season	sig. corr.	Kolmogorov	significance
95 %	14.18	95 %	-	0.0921	normal

De bovenstaande toetsresultaten leiden wat betreft de keuze van de toe te passen toets tot de volgende conclusie:

- Wanneer de seizoensinvloeden uit de ruwe dataset verwijderd worden, dan kan de correlatiecoëfficiënt van Pearson worden toegepast;
- De beide varianten van de Seasonal Kendall toets kunnen op de ruwe dataset worden toegepast.

Het cadmium gehalte van de Neerbeek in Limburg neemt tussen 1983 en 1996 af. Met behulp van de correlatiecoëfficiënt van Pearson wordt de aanwezigheid van een significante trend getoetst. Voor het toepassen van de correlatiecoëfficiënt van Pearson is in dit voorbeeld gebruik gemaakt van de ruwe data (in de praktijk dienen seizoensinvloeden verwijderd te worden voordat de correlatiecoëfficiënt van Pearson wordt berekend)

De meetwaarden op detectieniveau zijn in dit voorbeeld vervangen door de detectielimiet zelf.

Stap 1: Aan de datum van de meetwaarden is een dagnummer toegekend waarbij nummer 1 staat voor 1 januari 1983. De meetdatum wordt dus getransformeerd naar het aantal dagen vanaf 1 januari 1983 (de datum van de eerste meetwaarde, 19 januari, wordt dus 19 en de datum van de laatste meetwaarde, 4 december 1996 wordt 5087). De dagnummers van de waarnemingen worden nu steekproef x en de meetwaarden zelf worden steekproef y . De correlatiecoëfficiënt wordt berekend tussen de steekproeven x en y .

Stap 2: Standaarddeviaties (§ 3.4) van de steekproeven x en y : $s_x=1535$
 $s_y=0.889$

Stap 3: Covariantie van steekproeven x en y (§ 3.5): $s_{xy}=546.2$

Stap 4: De (steekproef)correlatiecoëfficiënt wordt nu: $r=546.2/(1535 \times 0.889)=0.405$.

Stap 5: Na standaardisatie wordt de toetsingsgrootte, waarbij $N=84$: $t=0.405 \times \sqrt{(842)/(10.405^2)}=4.011$.

Stap 6: De kritieke waarde van de t -verdeling voor een onbetrouwbaarheidsniveau $\alpha=0.05$ en het aantal vrijheidsgraden $df=N-2=84$: $t_{(N-2, 1-\frac{\alpha}{2})}=1.989$.

H_0 wordt verworpen indien $|t|>1.989$. H_0 wordt verworpen, er is een trend aanwezig.

6.5 TOETS VOOR TREND: RANGCORRELATIECOËFFICIËNT VAN SPEARMAN

6.5.1 INLEIDING

De correlatiecoëfficiënt meet de lineaire samenhang tussen de variabelen x en y . Met andere woorden de correlatiecoëfficiënt meet de spreiding van de waarnemingen rond een rechte lijn, de regressielijn. Indien de waarnemingen niet-normaal verdeeld zijn kan de samenhang uitgedrukt worden met behulp van de rangcorrelatiecoëfficiënt van Spearman. Deze coëfficiënt is gebaseerd op het toekennen van rangnummers aan de x en y waarden, waarbij de kleinste waarde rangnummer 1 krijgt (x is de datum is behorende bij meetwaarde y). De rangcorrelatiecoëfficiënt van Spearman staat ook bekend als de Spearmans Rho toets.

6.5.2 TOEPASBAARHEID EN BIJZONDERHEDEN

Voor de verdelingsvrije rangcorrelatiecoëfficiënt van Spearman hoeven de data niet normaal verdeeld te zijn. De data dienen echter wel onafhankelijk (geen seriële correlatie in de dataset) en zonder seizoensinvloeden te zijn

Voor de berekening van de correlatiecoëfficiënt van Pearson worden de volgende randvoorwaarden aan de dataset gesteld:

- de meetreeks is vrij van seizoensinvloeden;
- de meetreeks is equidistant;
- de residuen van de gepaarde waarnemingen zijn onafhankelijk.

6.5.3 HYPOTHESE

Met een toets kan een uitspraak gedaan worden over de significantie van het verband in de populatie:

H_0 : er is geen samenhang tussen x en y ;

H_A : x en y zijn onderling afhankelijk.

6.5.4 TOETSINGSGROOTHEID, FORMULES EN KRITIEKE WAARDEN

De rangcorrelatiecoëfficiënt van Spearman wordt als volgt berekend:

$$r_s = 1 - \frac{6 \sum_{i=1}^n d_i^2}{N^3 - N} \quad (62)$$

$$t = r_s \times \sqrt{\frac{N-2}{1-r_s^2}} \quad (63)$$

Hierin is:

t	toetsingsgrootheid voor de rangcorrelatiecoëfficiënt van Spearman
r_s	steekproef rangcorrelatiecoëfficiënt van Spearman
d_i	verschil tussen rangnummers voor x_i en y_i
I	indexnummer voor individuele paren van meetwaarden x en y , waarbij x de datum is behorende bij meetwaarde y
N	totaal aantal paren bij elkaar horende x en y waarden

De toetsingsgrootheid t volgt een Student's t -verdeling met $N-2$ vrijheidsgraden. De kritieke waarde bij het onbetrouwbaarheidsniveau α wordt in een tabel met (rechter) overschrijdingskansen voor een t -verdeling afgelezen. De H_0 -hypothese wordt geaccepteerd wanneer $|t| < t_{(N-2, 1-\frac{1}{2}\alpha)}$. Bij minder dan 30 waarnemingen wordt een speciale verdelingstabel gebruikt (bijlage 12).

6.5.5 STAPPENPLAN UITVOERING TOETS

- Stap 1: Ken aan de datum van de meetwaarden een dagnummer toe, waarbij nummer 1 staat voor de datum van de eerste waarneming en nummer N voor de laatste meetdatum. De meetdatum wordt getransformeerd naar het aantal dagen vanaf de datum van de eerste meetwaarde. De dagnummers van de waarnemingen worden nu steekproef x en de meetwaarden zelf worden steekproef y . Indien een meetwaarde ontbreekt, wordt de meetdatum buiten beschouwing gelaten.
- Stap 2: Ken rangnummers toe aan x en y afzonderlijk (§ 3.10).
- Stap 3: Vervolgens worden de verschillen tussen de rangnummers berekend van bij elkaar horende x en y waarden ($=d_i$).
- Stap 4: Alle verschillen worden gekwadeerd en opgeteld, waardoor $\sum d_i^2$ wordt verkregen.
- Stap 5: De rangcorrelatiecoëfficiënt r_s kan nu volgens formule (62) worden berekend.
- Stap 6: r_s wordt vervolgens gestandaardiseerd tot de toetsingsgrootheid t volgens formule (63).
- Stap 7: De toetsingsgrootheid t volgt een Student's t -verdeling met $N-2$ vrijheidsgraden. De H_0 -hypothese wordt verworpen wanneer de kritieke waarde voor $t_{(N-2, 1-\frac{1}{2}\alpha)}$ wordt overschreden.

6.5.6 REKENVOORBEELD (CASE)

Case: Berekenen significantie van de trend met behulp van de rangcorrelatiecoëfficiënt van Spearman.

Data: Neerbeek Limburg, cadmium van 19-01-1983 t/m 04-12-1996; zie ook § 6.8.6 (case Seasonal Kendall II toets voor trend).

De keuze van de toe te passen toets voor het aantonen van (de significantie van) de trend is beschreven in § 6.4.6. Hieruit is gebleken dat de rangcorrelatiecoëfficiënt van Spearman niet de optimale toets is voor deze dataset. De onderhavige case dient derhalve als rekenvoorbeeld beschouwd te worden.

Het cadmium gehalte van de Neerbeek in Limburg neemt tussen 1983 en 1996 af. Met behulp van de rangcorrelatiecoëfficiënt van Spearman wordt de aanwezigheid van een significante trend getoetst. In deze dataset is periodiciteit aangetoond. Voor het toepassen van de rangcorrelatiecoëfficiënt van Spearman is in dit voorbeeld gebruik gemaakt van de ruwe data.

De meetwaarden op detectieniveau zijn in dit voorbeeld vervangen door de detectielimiet zelf (de conversiefactor is dus een).

De ruwe dataset is equidistant gemaakt op basis van kwartalen. Daar waar meetwaarden ontbreken is het kwartaalgemiddelde van het betreffende kwartaal ingevoerd.

Stap 1: Aan de kwartaal gemiddelde meetwaarden is een nummer toegekend waarbij nummer 1 staat voor het eerste kwartaal van 1983. De meetdatum wordt dus getransformeerd naar het aantal kwartalen vanaf 1 januari 1983 (de meetwaarde van het eerste kwartaal in 1983 krijgt dus volgnummer 1 en de meetwaarde van het laatste kwartaal in 1996 wordt nummer 56). De kwartaalnummers van de waarnemingen worden nu steekproef x en de meetwaarden zelf worden steekproef y . De rangcorrelatiecoëfficiënt wordt berekend tussen de steekproeven x en y .

Stap 2-4: Zie Tabel 6-5.

Stap 5: Het aantal dataparen x , y is 56 ($N=56$). De rangcorrelatiecoëfficiënt r_s wordt:

$$r_s = 1 - [6 \times 42120 / (17561656)] = 1 - 1.440 = 0.440.$$

Stap 6: De toetsingsgrootte t wordt vervolgens:

$$t = 0.440 \times \sqrt{(562) / (1 - 0.440^2)} = 3.601$$

Stap 7: De kritieke waarde van de t -verdeling voor een onbetrouwbaarheidsniveau $\alpha=0.05$ en het aantal vrijheidsgraden $df=N-2=54$:

$$t_{(1/2)\alpha} = 2.005.$$

H_0 wordt verworpen indien $|t| > 2.005$. H_0 wordt verworpen, er is een trend aanwezig.

Tabel 6-5: *Equidistante geaggregeerde meetwaarden en tussenwaarden d_i en d_i^2*

Jaar	kwartaal	kwartaalnr	kwartaalgemid d.	rangnr	d_i	d_i^2
1983	1	1	4.00	55.5	54.50	2970.25
1983	2	2	1.00	32	30.00	900.00
1983	3	3	2.00	47.5	44.50	1980.25
1983	4	4	0.50	15.5	11.50	132.25
1984	1	5	1.50	39.5	34.50	1190.25
1984	2	6	1.00	32	26.00	676.00
1984	3	7	2.50	51	44.00	1936.00
1984	4	8	4.00	55.5	47.50	2256.25
1985	1	9	1.50	39.5	30.50	930.25
1985	2	10	0.50	15.5	5.50	30.25
1985	3	11	0.50	15.5	4.50	20.25
1985	4	12	1.00	32	20.00	400.00
1986	1	13	2.90	54	41.00	1681.00
1986	2	14	2.10	49	35.00	1225.00
1986	3	15	0.50	15.5	0.50	0.25
1986	4	16	1.10	35	19.00	361.00
1987	1	17	1.60	42	25.00	625.00
1987	2	18	0.98	30	12.00	144.00
1987	3	19	0.43	11	8.00	64.00
1987	4	20	1.70	44	24.00	576.00
1988	1	21	2.79	53	32.00	1024.00
1988	2	22	2.60	52	30.00	900.00
1988	3	23	2.20	50	27.00	729.00
1988	4	24	1.30	37	13.00	169.00
1989	1	25	1.70	44	19.00	361.00
1989	2	26	0.67	21	5.00	25.00
1989	3	27	0.73	23	4.00	16.00
1989	4	28	0.75	24.5	3.50	12.25
1990	1	29	1.35	38	9.00	81.00
1990	2	30	0.75	24.5	5.50	30.25
1990	3	31	0.35	5	26.00	676.00
1990	4	32	0.38	6	26.00	676.00
1991	1	33	0.95	28	5.00	25.00
1991	2	34	0.69	22	12.00	144.00
1991	3	35	0.05	2	33.00	1089.00
1991	4	36	0.40	8	28.00	784.00
1992	1	37	0.97	29	8.00	64.00
1992	2	38	0.80	26	12.00	144.00
1992	3	39	0.42	10	29.00	841.00
1992	4	40	0.65	20	20.00	400.00
1993	1	41	1.80	46	5.00	25.00
1993	2	42	0.83	27	15.00	225.00
1993	3	43	0.13	4	39.00	1521.00
1993	4	44	0.59	19	25.00	625.00
1994	1	45	1.70	44	1.00	1.00
1994	2	46	1.14	36	10.00	100.00
1994	3	47	0.12	3	44.00	1936.00
1994	4	48	1.01	34	14.00	196.00
1995	1	49	2.00	47.5	1.50	2.25
1995	2	50	0.39	7	43.00	1849.00
1995	3	51	0.03	1	50.00	2500.00
1995	4	52	0.49	13	39.00	1521.00
1996	1	53	0.57	18	35.00	1225.00
1996	2	54	0.45	12	42.00	1764.00
1996	3	55	0.41	9	46.00	2116.00
1996	4	56	1.52	41	15.00	225.00
totaal d_i^2						42120.00

6.6 MANN-KENDALL TOETS

6.6.1 INLEIDING

Met behulp van de verdelingsvrije Mann-Kendall toets kan de aanwezigheid van een monotone verandering van een meetreeks in de tijd worden aangetoond. In geval van een lineaire verandering kan de grootte van de trend met behulp van de Sen Estimator of Slope worden berekend. (§ 6.2).

6.6.2 TOEPASBAARHEID EN BIJZONDERHEDEN

De dataset hoeft niet te voldoen aan een specifieke verdeling. De meetreeks dient echter wel vrij van seizoenseffecten te zijn. Indien in de dataset seizoensinvloeden aanwezig zijn dan wordt het gebruik van de Seasonal Kendall toets aanbevolen.

De Mann-Kendall toets is ongevoelig voor ontbrekende waarden en voor waarden lager of gelijk aan de detectielimiet. Indien meetwaarden op detectieniveau voorkomen in de dataset, dan dient de dataset te worden voorbehandeld volgens § 3.6.

De toets kan op een niet-equidistante meetreeks worden uitgevoerd (§ 3.8).

Voor de uitvoering van de Mann-Kendall toets worden de volgende randvoorwaarden aan de dataset gesteld:

- de meetreeks is vrij van seizoensinvloeden;
- de meetwaarden zijn onafhankelijk.

6.6.3 HYPOTHESE

De Mann-Kendall toets toetst op de aanwezigheid van een trend:

H_0 : er is geen trend in de dataset aanwezig;

H_A : er is een trend in de dataset aanwezig.

6.6.4 TOETSINGSGROOTHEID, FORMULES EN KRITIEKE WAARDEN

De Mann-Kendall toets kan met behulp van de onderstaande formules worden berekend:

$$S = \sum_{k=1}^{N-1} \sum_{j=k+1}^N \text{sgn}(x_j - x_k) \quad (64)$$

$$\text{VAR}(S) = \frac{1}{18} \left[N(N-1)(2N+5) - \sum_{p=1}^g t_p(t_p-1)(2t_p+5) \right] \quad (65)$$

$$\begin{aligned}
 VAR(S) = & \frac{1}{18} \left[N(N-1)(2N+5) - \sum_{p=1}^g t_p(t_p-1)(2t_p+5) \right] \\
 & - \frac{1}{18} \left[\sum_{q=1}^h u_q(u_q-1)(2u_q+5) \right] \\
 & + \frac{\sum_{p=1}^g t_p(t_p-1)(t_p-2) \sum_{q=1}^h u_q(u_q-1)(u_q-2)}{9N(N-1)(N-2)} \\
 & + \frac{\sum_{p=1}^g t_p(t_p-1) \sum_{q=1}^h u_q(u_q-1)}{2N(N-1)}
 \end{aligned} \tag{66}$$

$$\begin{aligned}
 Z &= \frac{(S-1)}{\sqrt{VAR(S)}}, & \text{indien } S > 0 \\
 Z &= 0, & \text{indien } S = 0 \\
 Z &= \frac{(S+1)}{\sqrt{VAR(S)}}, & \text{indien } S < 0
 \end{aligned} \tag{67}$$

Hierin is:

Z	toetsingsgrootheid van de Mann-Kendall toets
S	som van de signumfunctie
x_j, x_k	meetwaarden met volgnummer j en k
j, k	indexnummers voor de waarnemingen
N	totaal aantal waarnemingen
g	aantal groepen met dezelfde rangnummers
t_p	aantal meetwaarden in de p^{de} groep van dezelfde rangnummers
h	aantal meetperioden waarvoor meerdere meetwaarden beschikbaar zijn
u_q	het aantal meetwaarden in de q^{de} meetperiode (niet te verwarren met periode in de zin van seizoenen)

Wanneer tenminste 40 waarnemingen beschikbaar zijn, volgt de toetsingsgrootheid Z een standaard normale verdeling. De kritieke waarde bij een onbetrouwbaarheidsniveau α kan worden afgelezen in een tabel voor (rechter) overschrijdingskansen van de standaard normaalverdeling. De hypothese H_0 (geen significante trend aanwezig) wordt bij een onbetrouwbaarheidsniveau α geaccepteerd wanneer $|Z| < Z_{(1-\frac{1}{2}\alpha)}$.

Indien er maximaal 40 waarnemingen zijn, dan kan met behulp van de absolute waarde van S de overschrijdingskansen in een tabel worden afgelezen (bijlage 11)

6.6.5 STAPPENPLAN UITVOERING TOETS

- Stap 1: De meetgegevens worden gerangschikt naar volgorde van het tijdstip waarop ze genomen zijn.
- Stap 2: Bereken formule (64) met behulp van de signumfunctie (§ 3.9).
- Stap 3: Nadat de toetswaarde S is berekend, wordt de variantie van S ($VAR(S)$) berekend met behulp van formule (65). In deze formule is g het aantal groepen met gelijke rangnummers en t_p het aantal meetdata in de p^{de} groep met gelijke rangnummers.
- Stap 4: Wanneer S en $VAR(S)$ bekend zijn, kan de toetswaarde Z worden berekend volgens de formules (67).
- Stap 5: Er is geen significante trend in de meetreeks aanwezig, wanneer de absolute waarde van Z kleiner is dan $Z_{(1-\frac{\alpha}{2})}$. Is de absolute waarde van Z groter dan of gelijk aan $Z_{(1-\frac{\alpha}{2})}$, dan is de trend wel significant.

Wanneer er voor één of meer meetperioden meer dan één meetwaarden beschikbaar zijn, dan wordt $VAR(S)$ berekend volgens formule (66).

6.6.6 REKENVOORBEELD (CASE)

Case: Berekenen significantie van de trend met behulp van de Mann-Kendall toets.

Data: Neerbeek Limburg, cadmium van 19-01-1983 t/m 04-12-1996; zie ook § 6.8.6 (*case* Seasonal Kendall II toets voor trend).

Het cadmium gehalte van de Neerbeek in Limburg neemt tussen 1983 en 1996 af. Met behulp van de Mann-Kendall toets wordt de aanwezigheid van een significante trend getoetst. In deze dataset is periodiciteit aangetoond (§ 6.4.6). Voor het toepassen van de Mann-Kendall toets is in dit voorbeeld gebruik gemaakt van de ruwe data (in de praktijk dienen seizoensinvloeden verwijderd te worden voordat de Mann-Kendall toets wordt toegepast). De onderhavige *case* dient derhalve als rekenvoorbeeld beschouwd te worden.

De meetwaarden op detectieniveau zijn in dit voorbeeld vervangen door de detectielimiet zelf (de conversiefactor is dus een). In dit voorbeeld is de Mann-Kendall toets toegepast op de meetwaarden van het eerste kwartaal van alle in de dataset aanwezige meetwaarden.

Stap 1-2: Zie Tabel 6-6.

Stap 3: Omdat er voor enkele meetperioden meer dan één meetwaarden aanwezig zijn, dient formule (66) te worden toegepast voor de berekening van $VAR(S)$:

$$\begin{aligned} VAR(S) = & 1/18 \{ 22(22-1)(2 \times 22 + 5) - [2(2-1)(2 \times 2 + 5) + 2(2-1)(2 \times 2 + 5)] \\ & - [2(2-1)(2 \times 2 + 5) + 2(2-1)(2 \times 2 + 5) + 2(3-1)(2 \times 3 + 5) + 2(3-1)(2 \times 3 + 5) + 2(3-1)(2 \times 3 + 5)] \\ & + 1/[(9 \times 22(22-1)(22-2)) \times \{ [2(2-1)(2-2) + 2(2-1)(2-2)] \\ & \quad \times [2(2-1)(2-2) + 2(2-1)(2-2) + 2(3-1)(3-2) + 2(3-1)(3-2) + 2(3-1)(3-2)] \\ & + 1/[2 \times 22(22-1)] \times \{ [2(2-1) + 2(2-1)] \times [2(2-1) + 2(2-1) + 2(3-1) + 2(3-1) + 2(3-1)] \} \} \end{aligned}$$

$$VAR(S) = 1257$$

Stap 4: $Z = (-84 + 1) / \sqrt{1257} = -2.341$

Stap 5: De kritieke waarde van de Z -verdeling voor een onbetrouwbaarheidsniveau $\alpha = 0.05$

$$Z_{(1-\frac{\alpha}{2})} = 1.96.$$

H_0 wordt verworpen indien $|Z| > 1.96$. H_0 wordt verworpen, er is een trend aanwezig.

Tabel 6-6: Meetwaarden en kengetallen voor de signumfunctie van de Mann-Kendall toets

Datum	waarde	rang- nrs.	S[k]	k										
				1	2	3	4	5	6	7	8	9		
				4	1.5	1.5	2.9	1	2.2	2.79	1.7	1.6	1.1	0.95
19-01-83	4	22												
15-03-84	1.5	11.5	-1	-1										
16-01-85	1.5	11.5	-1	-1	0									
27-01-86	2.9	21	1	-1	1	1								
21-01-87	1	7	-4	-1	-1	-1	-1							
25-02-87	2.2	16	0	-1	1	1	-1							
13-01-88	2.79	20	2	-1	1	1	-1	1	1					
16-03-89	1.7	14	-1	-1	1	1	-1	1	-1	-1				
07-02-90	1.6	13	-2	-1	1	1	-1	1	-1	-1	-1			
21-03-90	1.1	8.5	-6	-1	-1	-1	-1	1	-1	-1	-1			
11-03-91	0.95	4	-10	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1		
25-03-92	0.97	5	-9	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	1
02-02-93	1.8	15	4	-1	-1	-1	-1	1	-1	-1	1	1	1	1
14-01-94	2.7	19	7	-1	1	1	-1	1	1	-1	1	1	1	1
22-02-94	1.1	8.5	-6	-1	-1	-1	-1	1	-1	-1	-1	-1	-0	1
14-03-94	1.3	10	-5	-1	-1	-1	-1	1	-1	-1	-1	-1	1	1
24-01-95	2.6	18	8	-1	1	1	-1	1	1	-1	1	1	1	1
15-02-95	2.4	17	8	-1	1	1	-1	1	1	-1	1	1	1	1
22-03-95	0.99	6	-12	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	1
16-01-96	0.6	2	-19	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1
27-02-96	0.7	3	-19	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1
25-03-96	0.41	1	-19	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1
datum	waarde	rang- nrs.		K										
				10	11	12	13	14						
				0.97	1.8	2.7	1.1	1.3	2.6	2.4	0.99	0.6	0.7	0.41
19-01-83	4	22												
15-03-84	1.5	11.5												
16-01-85	1.5	11.5												
27-01-86	2.9	21												
21-01-87	1	7												
25-02-87	2.2	16												
13-01-88	2.79	20												
16-03-89	1.7	14												
07-02-90	1.6	13												
21-03-90	1.1	8.5												
11-03-91	0.95	4												
25-03-92	0.97	5												
02-02-93	1.8	15		1										
14-01-94	2.7	19		1	1									
22-02-94	1.1	8.5		1	-1									
14-03-94	1.3	10		1	-1									
24-01-95	2.6	18		1	1	-1	1	1						
15-02-95	2.4	17		1	1	-1	1	1						
22-03-95	0.99	6		1	-1	-1	-1	-1						
16-01-96	0.6	2		-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1			
27-02-96	0.7	3		-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1		
25-03-96	0.41	1		-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	
S			-84	g				2	h				5	
N			22	t[1]				2	q[1]				2	
				t[2]				2	q[2]				2	
									q[3]				3	
									q[4]				3	
									q[5]				3	

6.7 SEASONAL KENDALL I TOETS

6.7.1 INLEIDING

De Seasonal Kendall I toets is ontwikkeld voor het aantonen van een trend in een meetreeks waarin seizoensinvloeden aanwezig zijn en is afgeleid van de Mann-Kendall toets. Met behulp van deze toets kan alleen de aanwezigheid van een trend worden aangetoond. De grootte van de trend dient te worden berekend met behulp van de Seasonal Kendall Slope Estimator (§ 6.3)

6.7.2 TOEPASBAARHEID EN BIJZONDERHEDEN

De Seasonal Kendall I toets is ongevoelig voor ontbrekende waarden, voor waarden lager of gelijk aan de detectielimiet en voor seizoensinvloeden. De dataset hoeven niet te voldoen aan een specifieke verdeling, maar de meetwaarden dienen wel onafhankelijk te zijn (geen covariantie aanwezig tussen de verschillende seizoenen). De toets is ontworpen voor gebruik met maandelijkse meetwaarden en een minimale meetperiode van 3 jaar (in totaal ca. 40 metingen). De toets kan op een niet-equidistante meetreeks worden uitgevoerd (§ 3.8).

Voor de uitvoering van de Seasonal Kendall I toets worden de volgende randvoorwaarden aan de dataset gesteld:

- de meetwaarden zijn onafhankelijk.

6.7.3 HYPOTHESE

De Seasonal Kendall I toets toetst op de aanwezigheid van een trend:

H_0 : is geen trend aanwezig;

H_A : er is een trend aanwezig.

6.7.4 TOETSINGSGROOTHEID, FORMULES EN KRITIEKE WAARDEN

De Seasonal Kendall I toets wordt met behulp van de onderstaande formules uitgevoerd.

$$S = \sum_{i=1}^k S_i \quad (68)$$

$$VAR(S) = \sum_{i=1}^k VAR(S_i) \quad (69)$$

$$Z = \frac{(S - 1)}{\sqrt{VAR(S)}}, \quad \text{indien } S > 0$$
$$Z = 0, \quad \text{indien } S = 0 \quad (70)$$

$$Z = \frac{(S + 1)}{\sqrt{\text{VAR}(S)}}, \quad \text{indien } S < 0$$

Hierin is:

Z	toetsingsgrootheid van de Seasonal-Kendall toets
S	totale som van de signumfunctie
S_i	som van de signumfunctie voor periode (seizoen) i
N	totaal aantal waarnemingen

De toetsingsgrootheid Z volgt een standaard normale verdeling. De kritieke waarde bij een onbetrouwbaarheidsniveau α kan worden afgelezen in een tabel voor (rechter) overschrijdingskansen van de standaard normaalverdeling. De hypothese H_0 (geen significante trend aanwezig) wordt bij een onbetrouwbaarheidsniveau α geaccepteerd wanneer $|Z| < Z_{(1-\frac{1}{2}\alpha)}$.

6.7.5 STAPPENPLAN UITVOERING TOETS

Stap 1:	Voor elk seizoen worden de meetgegevens van alle beschikbare jaren gerangschikt naar volgorde van het jaar waarin ze genomen zijn.
Stap 2:	Bereken per seizoen S_i en $\text{VAR}(S_i)$ zoals beschreven in de Mann-Kendall toets, § 6.6.4 en § 6.6.5.
Stap 3:	De voor elk seizoen berekende waarden S_i en $\text{VAR}(S_i)$ worden vervolgens gesommeerd tot S en $\text{VAR}(S)$ met behulp van de formules (68) en (69).
Stap 4:	Wanneer S en $\text{VAR}(S)$ bekend zijn, kan de toetswaarde Z worden berekend volgens de formules (70).
Stap 5:	Er is geen significante trend in de meetreeks aanwezig, wanneer de absolute waarde van Z kleiner is dan $Z_{1-\frac{1}{2}\alpha}$. Is de absolute waarde van Z groter dan of gelijk aan $Z_{(1-\frac{1}{2}\alpha)}$, dan is de trend wel significant.

6.7.6 REKENVOORBEELD (CASE)

Case: Berekenen significantie van de trend met behulp van de Seasonal Kendall I toets.

Data: Neerbeek Limburg, cadmium van 19-01-1983 t/m 04-12-1996; zie ook § 6.8.6 (case Seasonal Kendall II toets voor trend)

Het cadmium gehalte van de Neerbeek in Limburg neemt tussen 1983 en 1996 af. Met behulp van Seasonal Kendall I toets wordt de aanwezigheid van een significante trend getoetst. In de dataset is geen afhankelijkheid van de waarnemingen aangetoond (§ 6.4.6).

De meetwaarden op detectieniveau zijn in dit voorbeeld vervangen door de detectielimiet zelf (de conversiefactor is 1).

Stap 1-3: De resultaten van de signum voor het berekenen van S_i voor het eerste kwartaal zijn weergegeven in Tabel 6-6. De S_i -waarden voor alle kwartalen zijn:

S_1	-84
S_2	-74
S_3	-85
S_4	-41

De totale som S van de signumfunctie voor alle kwartalen wordt daarmee: $S = -284$

Voor de berekening van $\text{VAR}(S)$ zie § 6.3.4: $\text{VAR}(S) = 4350$

Stap 4: $Z = (-284 + 1) / \sqrt{4350} = -4.29$

Stap 5: De kritieke waarde van de Z-verdeling voor een onbetrouwbaarheidsniveau $\alpha=0.05$: $Z_{(1-\alpha/2)}=1.96$. H_0 wordt verworpen indien $|Z|>1.96$. H_0 wordt verworpen, er is een trend aanwezig.

6.8 SEASONAL KENDALL II TOETS

6.8.1 INLEIDING

Zie Seasonal Kendall I toets.

6.8.2 TOEPASBAARHEID EN BIJZONDERHEDEN

Evenals de Seasonal Kendall I toets (§ 6.7) is deze toets ongevoelig voor seizoenseffecten. Deze toets is echter ongevoelig voor afhankelijkheid van de meetwaarden. Meetwaarden onder de detectielimiet dienen te worden behandeld zoals in § 3.6 is beschreven. In tegenstelling tot de Seasonal Kendall I toets dienen de waarnemingen equidistant te zijn. Voor deze toets is een variant beschreven waarbij per gedefinieerd seizoen (na aggregatie) geen meetwaarden mogen ontbreken en een variant waarbij dat wel toegestaan is.

Voor de uitvoering van de worden de volgende randvoorwaarden aan de dataset gesteld:

- de meetwaarden zijn equidistant.

6.8.3 HYPOTHESE

Zie Seasonal Kendall I toets.

6.8.4 TOETSINGSGROOTHEID EN FORMULES

De toets wordt met behulp van onderstaande formules uitgevoerd:

$$R_{i,g} = \frac{n_g + 1 + \sum_{i=1}^n \text{sgn}(x_{j,g} - x_{i,g})}{2} \quad (71)$$

$$K_{g,h} = \sum_{i=1}^{y-1} \sum_{j=i+1}^y \text{sgn}[(x_{j,g} - x_{i,g})(x_{j,h} - x_{i,h})] \quad (72)$$

$$\text{COV}(S_g, S_h) = \frac{\left[K_{g,h} + 4 \sum_{i=1}^y R_{i,g} R_{i,h} - n(n+1)^2 \right]}{3} \quad (73)$$

$$COV(S_g, S_h) = \frac{K_{g,h} + 4 \sum_{i=1}^y R_{i,g} R_{i,h} - n(n_g + 1)(n_h + 1)}{3} \quad (74)$$

$$VAR(S) = \sum_{i=1}^s VAR(S_i) + \sum_{g=1}^s \sum_{\substack{h=1 \\ g \neq h}}^s COV(S_g, S_h) \quad (75)$$

Hierin is:

x	meetwaarde
i, j	tellers in seizoensdatasets
g, h	seizoensindicatoren
$R_{i,g}$	rangnummer van meting nummer i in seizoen g
n	totaal aantal metingen
n_g	aantal metingen in seizoen g
$K_{g,h}$	Tussenresultaat berekening covariantie tussen de seizoenen g en h
$COV(S_g, S_h)$	covariantie tussen seizoenen g en h
$VAR(S)$	totale variantie, rekening houdend met seriële correlatie

6.8.5 STAPPENPLAN UITVOERING TOETS

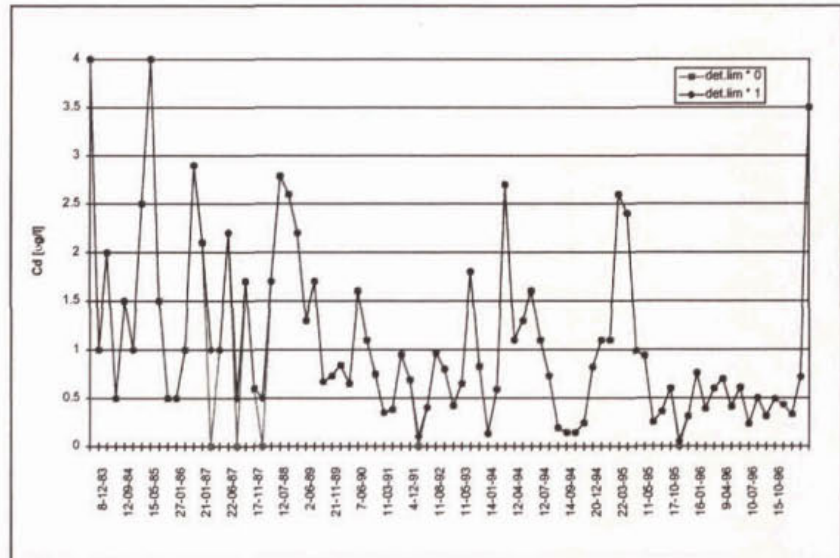
- Stap 1: Maak de dataset equidistant.
- Stap 2: Bereken voor elk seizoen de waarde S_i zoals aangegeven in § 6.6.4 en § 6.6.5. De waarde Seasonal Kendall S is de sommatie van alle S_i (§ 6.7.4 en § 6.7.5).
- Stap 3: Bereken voor ieder seizoen i $VAR(S_i)$ zoals aangegeven in § 6.6.4 en § 6.6.5.
- Stap 4: Bereken voor elke combinatie van seizoenen (g,h) de grootte K_{gh} volgens formule (72).
- Stap 5: Voor het berekenen van $R_{ig} \times R_{ih}$ worden de waarnemingen voor iedere combinatie van kwartalen (g,h) gepaard. Hierna worden per kwartaal aan de waarnemingen rangnummers toegekend.
- Stap 6: Bereken de sommatie van $R_{ig} \times R_{ih}$ voor iedere combinatie van seizoenen (g,h) (formule (73) of (74)).
- Stap 7: Bereken de covariantie $COV(S_g, S_h)$ voor elke combinatie van seizoenen volgens formule (73) indien geen data ontbreken en volgens formule (74) bij ontbrekende gegevens.
- Stap 8: Voor de berekening van $VAR(S)$ volgens formule (75) wordt een matrix opgesteld voor iedere combinatie van kwartalen (g,h) . De covariantie tussen de seizoenen g en h ($COV(S_g, S_h)$; waarbij $g \neq h$) is hierbij gelijk aan de covariantie tussen de seizoenen h en g ($COV(S_h, S_g)$). Op de diagonaal van de matrix ($g=h$) staan de waarden voor $VAR(S_i)$. $VAR(S)$ is de totale som van de matrix en wordt verkregen door sommatie van alle $VAR(S_i)$ van alle kwartalen op te tellen bij de sommatie van alle $COV(S_g, S_h)$ en $COV(S_h, S_g)$.
- Stap 9: Het berekenen van de toetswaarde Z en het toetsen van de hypothese worden uitgevoerd volgens de stappen 4 en 5 in § 6.7.5 (en formule (70)).

6.8.6 REKENVOORBEELD (CASE)

Case: Berekenen significantie van de trend met behulp van de Seasonal Kendall II toets.

Data: Neerbeek Limburg, cadmium van 19-01-1983 t/m 04-12-1996.

Het cadmium gehalte van de Neerbeek in Limburg neemt tussen 1983 en 1996 af. Met behulp van Seasonal Kendall II toets wordt de aanwezigheid van een significante trend getoetst. De ruwe datareeks (Figuur 6-2 en Tabel 6-7) is op basis van kwartalen equidistant gemaakt.



Figuur 6-2: Cadmium concentraties in de Neerbeek, 1983-1996

- Stap 1:** De dataset is equidistant gemaakt door voor ieder kwartaal het gemiddelde van de in dat kwartaal beschikbare meetwaarden te berekenen (Tabel 6-8)
- Stap 2:** Voor het eerste kwartaal zijn alle tussenresultaten van de signumfunctie weergegeven in Tabel 6-9, alsmede de waarden voor S_i voor alle kwartalen.
 $S = -13 + -14 + -56 + -12 = -115$
- Stap 3:** Voor elk kwartaal i wordt $VAR(S_i)$ berekend. Voor het eerste kwartaal wordt deze:
 $VAR(S_i) = 1/18 \{ 14(14-1)(2 \times 14 + 5) - [2(2-1)(2 \times 2 + 5) + 2(2-1)(2 \times 2 + 5)] \} = 331.67$
- Stap 4:** Voor elke combinatie van kwartalen (g, h) wordt de grootte K_{gh} berekend. De resultaten hiervan zijn gepresenteerd in Tabel 6-10.
- Stap 5:** Voor het berekenen van $R_{ig} \times R_{ih}$ worden per kwartaal aan de waarnemingen rangnummers toegekend: zie Tabel 6-11.
- Stap 6:** In Tabel 6-11 zijn alle tussenresultaten van de berekening van de sommatie van $R_{ig} \times R_{ih}$ voor iedere combinatie van kwartalen (g, h) gepresenteerd.
- Stap 7:** Met de kengetallen in Tabel 6-12 kan nu de $COV(S_g, S_h)$ voor iedere combinatie van kwartalen (g, h) worden berekend. Omdat er sprake is van ontbrekende data (kwartaal 4 van 1986 ontbreekt) is hierbij formule (74) toegepast.
- Stap 8:** Tabel 6-13 is de matrix voor de berekening van $VAR(S)$ volgens formule (75):
 $VAR(S) = (331.67 + 332.67 + 332.67 + 268.67) + 2 \times (176 + 99.33 + -8 + 161 + 92 + 140.66) = 2587.7$
- Stap 9:** $Z = (S+1)/\sqrt{VAR(S)} = (-115+1)/\sqrt{2587.7} = -2.24$
 De kritieke waarde van de Z-verdeling voor een onbetrouwbaarheidsniveau $\alpha=0.05$
 $Z_{(1-\alpha/2)} = 1.96$.
 H_0 wordt verworpen indien $|Z| > 1.96$. H_0 wordt verworpen, er is een trend aanwezig.

Tabel 6-7: Ruwe meetwaarden cadmium concentraties in de Neerbeek, 1983/1996

Datum	meet- waarde	datum	meet- waarde	datum	meet- waarde	datum	meet- waarde
19-01-83	4	17-11-87	1.7	25-03-92	0.97	24-01-95	2.6
19-05-83	1	13-01-88	2.79	21-05-92	0.8	15-02-95	2.4
14-09-83	2	18-04-88	2.6	11-08-92	0.42	22-03-95	0.99
08-12-83	0.5	12-07-88	2.2	10-11-92	0.65	11-04-95	0.94
15-03-84	1.5	13-12-88	1.3	02-02-93	1.8	09-05-95	0.25
10-05-84	1	16-03-89	1.7	11-05-93	0.83	11-05-95	0.36
12-09-84	2.5	02-06-89	0.67	03-08-93	0.13	20-06-95	0.6
10-10-84	4	10-08-89	0.73	23-11-93	0.59	10-08-95	<0.05
16-01-85	1.5	06-10-89	0.84	14-01-94	2.7	17-10-95	0.31
15-05-85	0.5	21-11-89	0.65	22-02-94	1.1	15-11-95	0.76
14-08-85	0.5	07-02-90	1.6	14-03-94	1.3	12-12-95	0.39
06-12-85	1	21-03-90	1.1	12-04-94	1.6	16-01-96	0.6
27-01-86	2.9	07-06-90	0.75	02-05-94	1.1	27-02-96	0.7
09-04-86	2.1	16-08-90	0.35	02-06-94	0.73	25-03-96	0.41
11-08-86	<1.0	09-11-90	0.38	12-07-94	0.19	09-04-96	0.61
21-01-87	1	11-03-91	0.95	19-08-94	0.14	07-05-96	0.23
25-02-87	2.2	11-06-91	0.69	13-09-94	0.14	12-06-96	0.5
21-05-87	<0.5	02-09-91	<.1	14-09-94	0.24	10-07-96	0.31
22-06-87	1.7	04-12-91	0.4	05-10-94	0.82	20-08-96	0.49
17-08-87	0.6			02-11-94	1.1	18-09-96	0.43
21-09-87	<0.5			20-12-94	1.1	15-10-96	0.33
						19-11-96	0.72
						04-12-96	3.5

Tabel 6-8: Rangnummers ($R_{i,g}$) van de equidistante meetreeks per kwartaal en $VAR(S_i)$ voor elk kwartaal

Jaar	kwartaal 1		kwartaal 2		kwartaal 3		kwartaal 4	
	waarde	clusters gelijke waar- nemingen	Waarde	clusters gelijke waar- nemingen	waarde	clusters gelijke waar- nemingen	waarde	clusters gelijke waar- nemingen
1983	4.00		1.00	a	2.00		0.50	
1984	1.50	a	1.00	a	2.50		4.00	
1985	1.50	a	0.50		0.50	a	1.00	
1986	2.90		2.10		0.50	a	-	
1987	1.60		0.98		0.43		1.70	
1988	2.79		2.60		2.20		1.30	
1989	1.70	b	0.67		0.73		0.75	
1990	1.35		0.75		0.35		0.38	
1991	0.95		0.69		0.05		0.40	
1992	0.97		0.80		0.42		0.65	
1993	1.80		0.83		0.13		0.59	
1994	1.70	b	1.14		0.12		1.01	
1995	2.00		0.39		0.03		0.49	
1996	0.57		0.45		0.41		1.52	
VAR(S)	331.67		332.67		332.67		268.67	

Tabel 6-9: Resultaten S_i (voor kwartaal 1 tevens tussenresultaten signumfunctie)

Jaar	waarde	4	1.5	1.5	2.9	1.6	2.79	1.7	1.35	0.95	0.97	1.8	1.7	2.0	0.57
83	4														
84	1.5	-1													
85	1.5	-1	0												
86	2.9	-1	1	1											
87	1.6	-1	1	1	-1										
88	2.79	-1	1	1	-1	1									
89	1.7	-1	1	1	-1	1	-1								
90	1.35	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1							
91	0.95	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1						
92	0.97	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	1					
93	1.8	-1	1	1	-1	1	-1	1	1	1	1				
94	1.7	-1	1	1	-1	1	-1	0	1	1	1	-1			
95	2.0	-1	1	1	-1	1	-1	1	1	1	1	1	1		
96	0.57	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	
subtotalen		-13	3	3	-10	1	-8	-2	0	3	2	-1	0	-1	
S _i voor 1 ^e kwartaal: -23															
		i										S _i			
		1										-23			
		2										-24			
		3										-56			
		4										-12			

Tabel 6-10: Tussenproducten voor berekening $K_{g,h}$

K _{1,2} : product (X[j,1]-X[i,1])×(X[j,2]-X[i,2])													
	0	1	-1	1	-1	1	1	1	1	1	1	-1	1
0		0	1	-1	1	-1	1	1	1	1	-1	1	-1
1	0		1	1	1	1	-1	-1	-1	1	1	1	-1
-1	1	1		1	-1	1	1	1	1	1	1	1	1
1	-1	1	1		1	-1	1	1	1	1	-1	1	-1
-1	1	1	-1	1		1	1	1	1	1	1	1	1
1	-1	1	1	-1	1		-1	-1	-1	1	0	-1	-1
1	1	-1	1	1	1	-1		1	-1	1	1	-1	-1
1	1	-1	1	1	1	-1	1		1	1	1	-1	-1
1	1	-1	1	1	1	-1	-1	1		1	1	-1	-1
1	-1	1	1	1	-1	1	1	1	1		1	-1	-1
-1	1	1	1	1	1	1	0	1	1	1	-1		-1
1	-1	-1	1	-1	1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	-1
Som	6	3	4	9	5	9	0	5	7	5	5	6	-7
K _{1,2} = 57													

Tabel 6-10: Tussenproducten voor berekening $K_{g,h}$ (vervolg)

K _{1,3} : product (X[j,1]-X[i,1])×(X[j,3]-X[i,3])													
	-1	1	1	1	-1	1	1	1	1	1	1	1	1
-1		0	-1	-1	-1	-1	1	1	1	1	-1	-1	-1
1	0		0	-1	1	1	1	1	1	1	-1	-1	-1
1	-1	0		1	-1	-1	1	1	1	1	1	1	1
1	-1	-1	1		1	1	1	1	1	1	-1	-1	-1
-1	-1	1	-1	1		1	1	1	1	1	1	1	1
1	-1	1	-1	1	1		1	1	1	1	-1	0	-1
1	1	1	1	1	1	1		1	-1	-1	-1	-1	-1
1	1	1	1	1	1	1	1		1	1	1	1	-1
1	1	1	1	1	1	1	-1	1		-1	-1	-1	-1
1	-1	-1	1	-1	1	-1	-1	1	-1		1	-1	-1
1	-1	-1	1	-1	1	0	-1	1	-1	1		-1	-1
1	-1	-1	1	-1	1	-1	-1	-1	-1	-1	-1		-1
1	1	1	1	1	1	1	-1	-1	1	-1	-1	-1	
Som	9	-4	3	6	3	7	4	3	9	5	-3	-2	-7
K _{1,3} = 33													

Tabel 6-10: Tussenproducten voor berekening $K_{g,h}$ (vervolg)

$K_{1,4} : \text{product } (X[j,1]-X[i,1]) \times (X[j,4]-X[i,4])$												
	-1	-1	-1	-1	-1	1	1	-1	-1	-1	1	
-1		0	-1	-1	-1	-1	1	1	1	-1	-1	
-1	0		1	1	-1	-1	1	1	1	1	-1	
-1	-1	1		1	1	1	1	1	1	1	1	
-1	-1	1	1		-1	-1	1	1	1	-1	-1	
-1	-1	-1	1	-1		1	1	1	1	-1	1	
1	-1	-1	1	-1	1		-1	-1	-1	1	0	
1	1	1	1	1	1	-1		-1	-1	1	1	
-1	1	1	1	1	1	-1	-1		-1	1	-1	
-1	1	1	1	1	1	-1	-1	-1		1	-1	
-1	-1	1	1	-1	-1	1	1	1	1		1	
1	-1	-1	1	-1	1	0	1	-1	-1	1		
-1	-1	1	1	1	-1	1	1	1	1	1	1	
Som	-6	-5	3	8	0	0	-1	6	2	2	4	1
$K_{1,4} = 14$												

Tabel 6-10: Tussenproducten voor berekening $K_{g,h}$ (vervolg)

$K_{2,3} : \text{product } (X[j,2]-X[i,2]) \times (X[j,3]-X[i,3])$													
	0	1	-1	1	1	1	1	1	1	1	-1	1	
0		1	-1	1	-1	1	1	1	1	1	-1	1	
1	1		0	-1	1	1	-1	-1	-1	-1	-1	1	
-1	-1	0		1	1	-1	1	1	1	1	1	1	
1	1	-1	1		1	-1	1	1	1	1	-1	1	
1	-1	1	1	1		1	1	1	1	1	1	1	
1	1	1	-1	-1	1		-1	-1	-1	-1	-1	1	
1	1	-1	1	1	1	-1		1	1	-1	-1	1	
1	1	-1	1	1	1	-1	1		1	1	1	1	
1	1	-1	1	1	1	-1	1	1		-1	-1	1	
1	1	-1	1	1	1	-1	-1	1	-1		-1	1	
-1	-1	-1	1	-1	1	-1	-1	1	-1	-1		1	
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1		
1	1	1	1	1	1	1	-1	-1	1	-1	-1	1	
Som	8	6	0	6	7	11	-1	3	7	5	1	-5	13
$K_{2,3} = 61$													

Tabel 6-10: Tussenproducten voor berekening $K_{g,h}$ (vervolg)

$K_{2,4} : \text{product } (X[j,2]-X[i,2]) \times (X[j,4]-X[i,4])$												
	0	-1	1	-1	1	1	1	-1	-1	-1	-1	
0		1	-1	1	-1	1	1	1	1	1	-1	
-1	1		1	1	-1	-1	-1	-1	-1	1	-1	
1	-1	1		1	-1	1	1	1	1	1	1	
-1	1	1	1		-1	1	1	1	1	1	-1	
1	-1	-1	-1	-1		1	1	1	1	-1	1	
1	1	-1	1	1	1		1	1	1	1	1	
1	1	-1	1	1	1	1		-1	1	1	1	
-1	1	-1	1	1	1	1	-1		-1	1	-1	
-1	1	-1	1	1	1	1	1	-1		1	-1	
-1	1	1	1	1	-1	1	1	1	1		-1	
-1	-1	-1	1	-1	1	1	1	-1	-1	-1		
-1	1	-1	1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	
Som	-3	5	-4	8	4	0	8	6	0	2	4	-4
$K_{2,4} = 26$												

Tabel 6-10: Tussenproducten voor berekening $K_{g,h}$ (vervolg)

$K_{3,4} : \text{product } (X[j,3]-X[i,3]) \times (X[j,4]-X[i,4])$												
	1	-1	-1	-1	1	1	1	-1	-1	-1	1	
1		1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	
-1	1		0	-1	-1	-1	1	1	1	-1	1	
-1	1	0		1	-1	-1	1	1	1	1	1	
-1	1	-1	1		-1	-1	1	1	1	1	1	
1	1	-1	-1	-1		1	1	1	1	-1	1	
1	1	-1	-1	-1	1		-1	-1	-1	-1	-1	
1	1	1	1	1	1	-1		-1	1	-1	-1	
-1	1	1	1	1	1	-1	-1		-1	1	-1	
-1	1	1	1	1	1	-1	1	-1		-1	1	
-1	1	-1	1	1	-1	-1	-1	1	-1		1	
1	1	1	1	1	1	-1	-1	-1	1	1		
-1	1	-1	1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	
Som	-2	12	-1	5	2	2	-6	2	0	2	-2	4
$K_{3,4} = 18$												

Tabel 6-11: Tussenresultaten voor de berekening van het product $R_{i,g}R_{i,h}$

Volg nr. i (jaar)	rangnr's meetwaarden per seizoen				$R[i,1] * R[i,2]$	$R[i,1] * R[i,3]$	$R[i,1] * R[i,4]$	$R[i,2] * R[i,3]$	$R[i,2] * R[i,4]$	$R[i,3] * R[i,4]$
	1	2	3	4						
1	14	10.5	12		147	168		126		
2	5.5	10.5	14		57.75	77		147		
3	5.5	3	9.5		16.5	52.25		28.5		
4	13	13	9.5		169	123.5		123.5		
5	7	9	8		63	56		72		
6	12	14	13		168	156		182		
7	8.5	4	11		34	93.5		44		
8	4	6	5		24	20		30		
9	2	5	2		10	4		10		
10	3	7	7		21	21		49		
11	10	8	4		80	40		32		
12	8.5	12	3		102	25.5		36		
13	11	1	1		11	11		1		
14	1	2	6		2	6		12		
1	13	10.5	11	4			52		42	44
2	5.5	10.5	13	13			71.5		136.5	169
3	5.5	3	9	8			44		24	72
4	7	9	8	12			84		108	96
5	12	13	12	10			120		130	120
6	8.5	4	10	7			59.5		28	70
7	4	6	5	1			4		6	5
8	2	5	2	2			4		10	4
9	3	7	7	6			18		42	42
10	10	8	4	5			50		40	20
11	8.5	12	3	9			76.5		108	27
12	11	1	1	3			33		3	3
13	1	2	6	11			11		22	66
Som $R_g * R_h$					905.25	853.75	627.50	893.00	699.50	738.00

Tabel 6-12: Resultaten berekening $VAR(S)$ volgens Seasonal Kendall II

g,h	$K_{g,h}$ (Tabel 6-10)	SOM $R_{i,g} \times R_{i,h}$ (Tabel 6-11)	n_g	n_h	COV (S_g, S_h)	seizoen	VAR(S_i)	VAR(S)
1,2	57	905.25	14	14	176	1	331.67	2587.7
1,3	33	853.75	14	14	99.33	2	332.67	
1,4	14	631.5	13	13	-8	3	332.67	
2,3	61	893	14	14	161	4	268.67	
2,4	26	709.5	13	13	92			
3,4	18	776	13	13	140.66			

Tabel 6-13: Matrix voor $COV(S_g, S_h)$ en $VAR(S_i)$

g	h			
	1	2	3	4
1	331.67	176	99.33	-8
2	176	332.67	161	92
3	99.3	161	332.67	140.66
4	-8	92	140.66	268.67
Subtotaal	598.97	761.67	733.66	493.33
Totaal				2587.7

6.9 LETTENMAIER TOETS VOOR TREND

6.9.1 INLEIDING

De toets voor trend volgens Lettenmaier is een modificatie van de rangcorrelatiecoëfficiënt van Spearman (Spearman Rho toets) voor trend (§ 6.5) en wordt toegepast indien de tijdreeks afhankelijkheid vertoont. De kritieke waarde voor de toetsingsgrootte wordt daartoe gecorrigeerd voor seriële correlatie op basis van de geschatte eerste orde autocorrelatiecoëfficiënt van de meetreeks.

6.9.2 TOEPASBAARHEID EN BIJZONDERHEDEN

Evenals de Seasonal Kendall I en II toets (§ 6.7 en § 6.8) is deze toets ongevoelig voor periodiciteit. Evenals de Seasonal Kendall II toets dienen de waarnemingen equidistant te zijn.

Voor de uitvoering van de worden de volgende randvoorwaarden aan de dataset gesteld:

- de meetwaarden zijn equidistant.

6.9.3 HYPOTHESE

Met de toets voor trend volgens Lettenmaier wordt de aanwezigheid van een trend getoetst:

H_0 : er is geen trend aanwezig;

H_A : er is een trend aanwezig.

6.9.4 TOETSINGSGROOTHEID FORMULES EN KRITIEKE WAARDEN

De toets van Lettenmaier wordt met behulp van onderstaande formules uitgevoerd:

$$W'_{\alpha_l} = L_l + f(N, \alpha, r)(W_{\alpha_l} - L_l) \quad (76)$$

$$W'_{\alpha_u} = L_u + f(N, \alpha, r)(W_{\alpha_u} - L_u) \quad (77)$$

Hierin is:

$W'_{(l)}$	gemodificeerde onderste (linker) kritiekewaarde
$W'_{(u)}$	gemodificeerde bovenste (rechter) kritiekewaarde
$W_{(l)}$	onderste (linker) kritiekewaarde verkregen met de Spearman Rho toets
$W_{(u)}$	bovenste (rechter) kritiekewaarde verkregen met de Spearman Rho toets
L_l	$L_l = 0$
L_u	$L_u = 1/3(N(N^2-1))$
$f(N, \alpha, r)$	functie voor de correctie
N	aantal waarnemingen
α	onbetrouwbaarheidsniveau
r	autocorrelatiecoëfficiënt voor lag(1)

6.9.5 STAPPENPLAN UITVOERING TOETS

Stap 1: Bereken de toetsingsgrootheid van de Spearman Rho toets zoals beschreven in § 6.5. Bepaal op basis hiervan de onderste (linker) en bovenste (rechter) kritieke waarde, respectievelijk $W_{\alpha l}$ en $W_{\alpha u}$.

Stap 2: Bereken de lag(1) autocorrelatiecoëfficiënt r volgens (één van de drie methoden in) § 4.4.2.

Stap 3: Bereken de correctiefactor met behulp van de functie $f(N, \alpha, r)$. De correctiefactor is afhankelijk van het aantal metingen N , het gewenste onbetrouwbaarheidsniveau α en de lag(1) autocorrelatiecoëfficiënt r . De correctiefactor wordt met behulp van één van onderstaande functies geschat:

$F(30, 0.1, r)$	$= -0.6202 \times r^2 - 0.2563 \times r + 0.9631;$
$F(30, 0.05, r)$	$= -0.6083 \times r^2 - 0.3465 \times r + 0.9624;$
$F(30, 0.01, r)$	$= -0.4310 \times r^2 - 0.6325 \times r + 0.9969;$
$F(50, 0.1, r)$	$= -0.6012 \times r^2 - 0.1087 \times r + 0.9540;$
$F(50, 0.05, r)$	$= -0.8492 \times r^2 - 0.0096 \times r + 0.9354;$
$F(50, 0.01, r)$	$= -0.5238 \times r^2 - 0.4388 \times r + 0.9707;$
$F(100, 0.1, r)$	$= -0.5202 \times r^2 + 0.0065 \times r + 0.9691;$
$F(100, 0.05, r)$	$= -0.6060 \times r^2 + 0.0151 \times r + 0.9589;$
$F(100, 0.01, r)$	$= -0.6060 \times r^2 - 0.1206 \times r + 0.9746;$

Stap 4: De parameter L_l heeft bij gebruik van de Spearman Rho toets altijd een waarde nul ($L_l=0$)

De parameter L_u wordt verkregen met behulp van de formule:

$$L_u = 1/3 \times n(N/N^2 - 1).$$

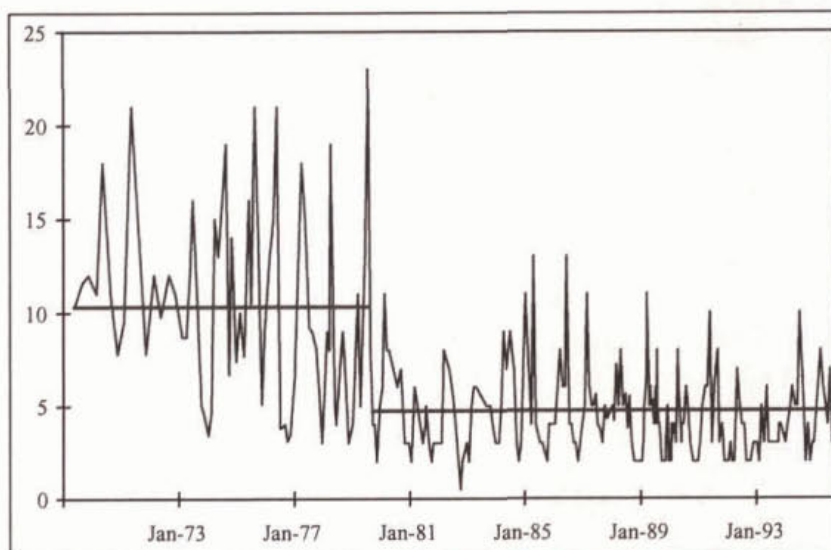
Stap 5: De gecorrigeerde onderste (linker) kritieke waarde $W'_{\alpha l}$ wordt berekend volgens formule (76) en de bovenste (rechter) kritieke waarde $W'_{\alpha u}$ met formule (77).

Stap 6: De H_0 -hypothese voor de Spearman Rho toets wordt verworpen wanneer de toetsingsgrootheid t (verkregen zoals in § 6.5 berekend) kleiner is dan de kritieke waarde $W'_{\alpha l}$ of groter is dan $W'_{\alpha u}$ bij een gegeven onbetrouwbaarheidsniveau α .

7 ANALYSE VAN DE EFFECTEN VAN BELEIDSMAATREGELEN: STAPTRENDS

Bij een beoordeling van de effecten van een beleidsmaatregel is men doorgaans geïnteresseerd in een wijziging van het (gemiddelde) niveau van een waterkwaliteitsvariabele ten opzichte van de situatie voor de ingang/uitvoering van de voorgenomen maatregel. Statistisch betekent dit dat verwacht kan worden dat het gemiddelde over een periode na de uitvoering van de ingreep of maatregel ongelijk is aan het gemiddelde over een periode voorafgaande daaraan. Deze vorm van trend wordt aangeduid met staptrend.

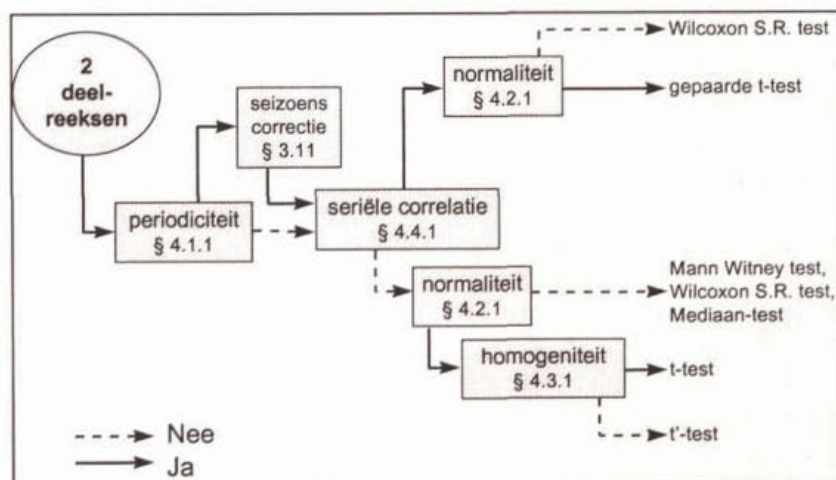
Een staptrend kan derhalve worden omschreven als een (min of meer) abrupte verandering van het gemiddelde van een meetreeks vóór en na een bepaalde datum. Figuur 7-1 is een voorbeeld van een staptrend, waarbij de daling is opgetreden tussen 1977 en 1981.



Figuur 7-1: Voorbeeld van een staptrend

Voor het aantonen van een staptrend is het noodzakelijk de dataset te splitsen in twee deelreeksen. Een deelreeks die de periode vóór het moment waarop verondersteld wordt dat een staptrend optreedt en een tweede deelreeks die de periode erna beslaat. In het beslisschema van Schema 7-1 is uiteengezet onder welke condities de verschillende toetsen waarmee een staptrend kan worden aangetoond kunnen worden toegepast. Het schema heeft betrekking op beide deelreeksen.

Om te kunnen vaststellen met welke toets de significantie van de trend kan worden aangetoond, wordt, zoals met de eerste stap in het beslisschema is aangegeven, getoetst op aanwezigheid van periodiciteit door middel van de Kruskal-Wallis toets (§ 4.1.1.1). Indien periodiciteit aangetoond is, dient



Schema 7-1: Beslisschema toetskeuze staptrends (Blind, 1996)

een periodiciteitsvrije submeetreeks gegenereerd te worden, waarop vervolgens de aanwezigheid van seriële correlatie kan worden getoetst (=onderlinge afhankelijkheid van meetwaarden) met behulp van de Runs toets (§ 4.4.1). Vervolgens wordt getoetst op normaliteit met de toets van Lilliefors (§ 4.2.1). Als de meetwaarden onafhankelijk en normaal verdeeld zijn, dan dient gecontroleerd te worden of de varianties van beide deelreeksen gelijk zijn met behulp van de F-toets¹⁰ (§ 4.3.1). De aldus geselecteerde toets wordt tot slot toegepast op de oorspronkelijke meetreeks.

De in het schema genoemde toetsen zijn in de hierna volgende paragrafen beschreven. De Wilcoxon Signed Rank toets (§ 7.3) en de Wilcoxon Rank Sum toets (§ 7.4) zijn verdelingsvrije alternatieven voor het aantonen van een staptrend en kunnen worden gebruikt wanneer de data niet normaal verdeeld zijn. De Wilcoxon Signed Rank toets kan worden gebruikt wanneer de datasets even groot zijn en gepaard kunnen worden. De Wilcoxon Rank Sum toets kan ook worden gebruikt wanneer de deelreeksen niet even groot zijn. Zijn de meetwaarden normaal verdeeld en afhankelijk, dan kan de t-toets voor gepaarde steekproeven worden gebruikt (§ 7.2). Zijn de meetwaarden in de dataset normaal verdeeld en onafhankelijk, dan kan de aanwezigheid van een staptrend worden aangetoond met behulp van beide varianten van de t-toets voor gemiddelden (§ 7.1). Met behulp van genoemde toetsen kan tevens de significantie van de aanwezige trend worden getoetst.

7.1 T-TOETS VOOR GEMIDDELDEN

7.1.1 INLEIDING

Met behulp van een t-toets voor gemiddelden kan een staptrend in een dataset worden aangetoond. De dataset wordt daartoe in twee delen gesplitst op basis van het moment waarop verondersteld wordt dat een staptrend optreedt, het zogenaamde 'knippunt'. Met deze toets kan worden getoetst of de gemiddelden van beide delen van de dataset gelijk zijn. De toets is parametrisch.

7.1.2 TOEPASBAARHEID EN BIJZONDERHEDEN

Uitgangspunt van de t-toets is dat beide (deel)populaties van de dataset normaal verdeeld zijn. De populatie-standaarddeviaties van de beide (deel)populaties σ_1 en σ_2 zijn onbekend. Om deze reden wordt de hypothese getoetst met behulp van een t-verdeling. Deze t-toets kent twee varianten:

1. $\sigma_1 = \sigma_2$: *pooled variance*.

De populatie-standaarddeviaties van beide deelsets zijn gelijk, waardoor het gewogen gemiddelde van de varianties van de deelreeksen kan worden gebruikt, met het aantal vrijheidsgraden (N-1) van iedere deelreeks als gewichten. Of de 'pooled variance' mag worden toegepast, dient te worden getoetst met behulp van de verhouding tussen beide steekproefvarianties en de F-verdeling van Fischer.

¹⁰ De F-toets is niet noodzakelijk wanneer de t-toets standaard met de 'separate variance estimate' ($\sigma_1 \neq \sigma_2$) wordt uitgevoerd, zoals in § 7.1 is beschreven.

2. $\sigma_1 \neq \sigma_2$: *separate variance estimate.*

Beide steekproefvarianties worden meegenomen in de berekening van de toetsingsgrootheid t . In het onderstaande wordt alleen de tweede variant uiteengezet, omdat deze ook gebruikt kan worden wanneer de varianties gelijk zijn aan elkaar. De eerste methode is daarnaast bewerkelijker dan de tweede.

Voor het toepassen van de t -toets worden de volgende randvoorwaarden aan beide deelreeksen gesteld:

- de beide deelreeksen zijn normaal verdeeld;
- er zijn geen seizoensinvloeden in de beide deelreeksen aanwezig;
- de metingen in beide deelreeksen zijn onafhankelijk.

7.1.3 HYPOTHESE

Met de t -toets kan worden aangetoond dat de gemiddelden (μ_1 en μ_2) van beide deelsets van de meetreeks aan elkaar gelijk zijn. De onderstaande hypothese wordt geëvalueerd:

H_0 : $\mu_1 = \mu_2$; *geen staptrend aanwezig*;

H_A : $\mu_1 \neq \mu_2$; *staptrend aanwezig*.

7.1.4 TOETSINGSGROOTHEID, FORMULES EN KRITIEKE WAARDEN

De t -toets voor gemiddelden wordt met behulp van de volgende formule uitgevoerd:

$$t = \frac{(\bar{X}_1 - \bar{X}_2)}{\sqrt{\frac{s_1^2}{N_1} + \frac{s_2^2}{N_2}}} \quad (78)$$

$$df \approx \frac{\left(\frac{s_1^2}{N_1} + \frac{s_2^2}{N_2}\right)^2}{\frac{\left(\frac{s_1^2}{N_1}\right)^2}{N_1 - 1} + \frac{\left(\frac{s_2^2}{N_2}\right)^2}{N_2 - 1}} \quad (79)$$

Hierin is:

t	toetsingsgrootheid voor de t -toets
$\bar{X}_1, \bar{X}_2$	schatters voor de populatiegemiddelden van beide deelsets μ_1 en μ_2
s_1, s_2	schatters voor de populatie-standaarddeviaties (σ_1 en σ_2)
N_1, N_2	aantal meetwaarden in beide steekproeven
$d.f.$	aantal vrijheidsgraden

De toetsingsgrootheid t volgt een Student's t -verdeling. De kritieke waarde bij een gegeven onbetrouwbaarheidsniveau α en het berekende aantal vrijheidsgraden kan worden afgelezen in een tabel voor (rechter) overschrijdingskansen van de Student's t -verdeling. De hypothese H_0 (geen staptrend) wordt bij een onbetrouwbaarheidsniveau α geaccepteerd wanneer $|t| < t_{(d.f., 1-\frac{1}{2}\alpha)}$.

7.1.5 STAPPENPLAN UITVOERING TOETS

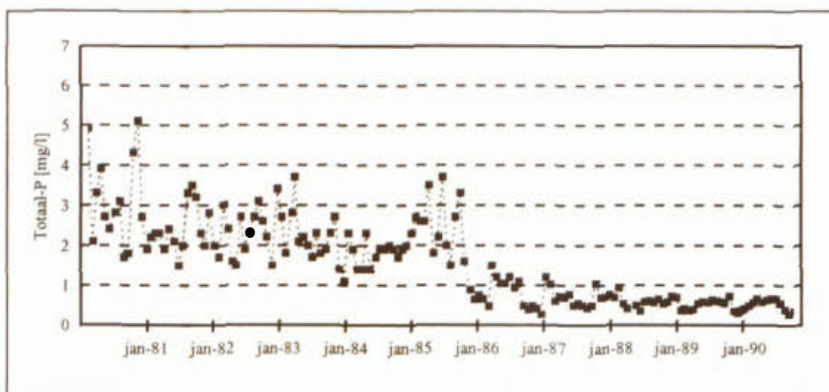
- Stap 1: Bereken gemiddelden $\bar{X}_1$ en $\bar{X}_2$ volgens § 3.1.
 Stap 2: Bereken de standaarddeviaties s_1 en s_2 volgens § 3.4.
 Stap 3: Bereken t volgens formule (78).
 Stap 4: Bereken het aantal vrijheidsgraden met behulp van formule (79).
 Stap 5: De H_0 -hypothese wordt verworpen wanneer de toetsingsgrootte t groter is dan of gelijk is aan de kritieke waarde bij een gegeven onbetrouwbaarheidsniveau α .

7.1.6 REKENVOORBEELD (CASE)

Case: t-toets voor staptrends

Data: Totaalfosfaat in de Bergsche Achterplas (1980-1990)

In de Bergsche Achterplas lag sinds 1975 het totaal fosfor gehalte op een niveau van ongeveer 2.5 mg P/l. Sinds het verwijderen van de AWZI in 1986 is het gehalte afgenomen tot ongeveer 0.5 mg P/l. Voor de toetsing op staptrend is de dataset gesplitst in een deelreeks van 1980 tot en met 1985 ($N_1=60$) en een deelreeks van 1985 tot en met 1990 ($N_2=60$). Beschikbare gegevens



Figuur 7-2: Totaalfosfaat Bergsche Achterplas

gegeven in de tabel aan het eind van de casebeschrijving. Op de ruwe dataset zijn a priori een aantal toetsen uitgevoerd. Deze toetsen en de resultaten hiervan zijn beschreven in Tabel 7-1

Tabel 7-1: Resultaten van de op de ruwe data uitgevoerde toetsen.

Toets	uitkomst
Periodiciteit (4 seizoenen, 1ste helft data)	Geen seizoensinvloed ($\alpha=0.05$)
Periodiciteit (4 seizoenen, 2e helft data)	Wel seizoensinvloed ($\alpha=0.05$)
Periodiciteit (4 seizoenen, alle data, nadat het gemiddelde per helft van de respectievelijke waarden is afgetrokken)	Geen seizoensinvloed ($\alpha=0.05$)
Toetsing op seriële afhankelijkheid (4 seizoenen, 1 ^e helft data)	Geen afhankelijkheid ($\alpha=0.05$); zie ook § 4.4.1.
Toetsing op seriële afhankelijkheid (4 seizoenen, 2 ^e helft data)	Wel afhankelijkheid ($\alpha=0.05$), komt overeen met de resultaten periodiciteit. Periodiciteit is afhankelijkheid, de Runs toets moet eigenlijk toegepast worden nadat bekende bronnen van variantie zijn verwijderd.
Normaliteit (Lilliefors, 1ste helft data)	Data zijn niet normaal verdeeld ($\alpha=0.05$); zie ook § 4.2.1.
Normaliteit (Lilliefors, 2e helft data)	Data zijn niet normaal verdeeld ($\alpha=0.05$).
Toets op gelijke varianties (F-toets)	Variantie 1ste helft wijkt af van 2e helft ($\alpha=0.05$); zie ook § 4.3.1.

Stap 1-2:

	<u>1980 - 1985</u>	<u>1985 - 1990</u>
gemiddelde:	2.1333	0.575667
standaard deviatie:	0.605438	0.280668
N:	60	60

Stap 3: $t = (2.133333 - 0.575667) / \sqrt{[(0.605438^2/60) + (0.280668^2/60)]} = 18.080$

Stap 4: $d.f. = (6.10925 \times 10^{-3} + 1.3129 \times 10^{-3}) / [(6.10925 \times 10^{-3})^2/59 + (1.3129 \times 10^{-3})^2/59] = 83$

Stap 5: Verwerp H_0 indien: $|t| > t_{(83, 0.975)}$, dus indien $|t| > 1.993$. H_0 wordt verworpen. Hieruit volgt dat er een staptrend aanwezig is.

Tabel 7-2: Data Bergsche Achterplas

1 ^e helft	2 ^e helft	verschil	rang	+/-	1 ^e helft	2 ^e helft	verschil	rang	+/-		
			nr.					nr.	-		
3-12-80	3.1	29-11-85	1.5	1.6	37 +	7-06-83	2.2	8-06-88	0.58	1.62	38 +
6-01-81	2.2	6-01-86	0.78	1.42	30.5 +	5-07-83	2.6	5-07-88	0.6	2	47 +
3-02-81	1.9	4-02-86	0.54	1.36	27.5 +	3-08-83	1.3	5-08-88	0.66	0.64	4 +
3-03-81	2.7	4-03-86	0.64	2.06	48 +	2-09-83	1	5-09-88	0.58	0.42	1 +
7-04-81	1.9	3-04-86	0.56	1.34	25.5 +	5-10-83	2.2	6-10-88	0.84	1.36	27.5 +
8-05-81	1.6	14-05-86	0.36	1.24	19.5 +	2-11-83	1.8	2-11-88	0.42	1.38	29 +
9-06-81	2.9	4-06-86	1.4	1.5	34.5 +	2-12-83	1.3	1-12-88	0.32	0.98	9.5 +
10-07-81	2.3	3-07-86	1.1	1.2	14.5 +	4-01-84	1.3	30-01-89	0.4	0.9	7 +
5-08-81	1.5	4-08-86	0.94	0.56	3 +	3-02-84	2.2	27-02-89	0.24	1.96	45 +
3-09-81	1.4	3-09-86	0.94	0.46	2 +	2-03-84	1.3	30-03-89	0.48	0.82	5 +
2-10-81	2.6	1-10-86	1.1	1.5	34.5 +	4-04-84	1.6	28-04-89	0.5	1.1	12 +
3-11-81	1.8	3-11-86	0.84	0.96	9.5 +	4-05-84	1.8	31-05-89	0.46	1.34	25.5 +
3-12-81	2.2	4-12-86	1	1.2	14.5 +	5-06-84	1.8	29-06-89	0.54	1.26	21 +
5-01-82	2.6	5-01-87	0.38	2.22	53.5 +	5-07-84	1.9	3-08-89	0.42	1.48	32.5 +
2-02-82	3	3-02-87	0.28	2.72	56 +	3-08-84	1.8	30-08-89	0.48	1.32	23.5 +
3-03-82	2.5	5-03-87	0.38	2.12	51 +	6-09-84	1.6	28-09-89	0.62	0.98	9.5 +
31-03-82	2.1	2-04-87	0.32	1.78	42 +	2-10-84	1.8	30-10-89	0.58	1.22	17.5 +
6-05-82	1.4	6-05-87	0.18	1.22	17.5 +	2-11-84	1.9	30-11-89	0.26	1.64	39 +
8-06-82	3.3	3-06-87	1.1	2.2	52 +	6-12-84	2.2	21-12-89	0.3	1.9	44 +
7-07-82	2.6	2-07-87	0.92	1.68	40 +	3-01-85	2.6	29-01-90	0.26	2.34	55 +
5-08-82	1.7	5-08-87	0.5	1.2	14.5 +	1-02-85	2.5	21-02-90	0.28	2.22	53.5 +
16-09-82	2.7	4-09-87	0.62	2.08	49.5 +	1-03-85	2.5	26-03-90	0.42	2.08	49.5 +
6-10-82	3.6	5-10-87	0.58	3.02	59 +	1-04-85	3.4	26-04-90	0.48	2.92	57 +
3-11-82	2	6-11-87	0.68	1.32	23.5 +	2-05-85	1.7	30-05-90	0.46	1.24	19.5 +
2-12-82	2.1	3-12-87	0.4	1.7	41 +	4-06-85	2.1	28-06-90	0.52	1.58	36 +
5-01-83	1.9	4-01-88	0.44	1.46	32.5 +	3-07-85	3.6	26-07-90	0.5	3.1	60 +
2-02-83	1.6	1-02-88	0.4	1.2	14.5 +	2-08-85	1.9	22-08-90	0.48	1.42	30.5 +
2-03-83	2.2	2-03-88	0.34	1.86	43 +	30-08-85	1.4	20-09-90	0.44	0.96	9.5 +
30-03-83	1.7	5-04-88	0.4	1.3	22 +	30-09-85	2.6	22-10-90	0.62	1.98	46 +
3-05-83	1.8	2-05-88	0.94	0.86	6 +	31-10-85	3.2	26-11-90	0.24	2.96	58 +

7.2 T-TOETS VOOR GEPAARDE STEEKPROEVEN

7.2.1 INLEIDING

Met deze toets wordt eveneens aangetoond of de gemiddelden van de beide deelreeksen gelijk zijn. In de t-toets voor gepaarde steekproeven worden de meetwaarden van beide deelreeksen paarsgewijs geëvalueerd.

7.2.2 TOEPASBAARHEID EN BIJZONDERHEDEN

De t-toets voor gepaarde steekproeven is een parametrische toets. De beide deelreeksen worden geacht normaal verdeeld te zijn. In tegenstelling tot de t-toets voor gemiddelden dienen in deze t-toets de meetwaarden van beide deelreeksen gepaard kunnen worden (gelijke meetdata, gelijke aantallen meetwaarden, geen missende meetwaarden).

Voor het toepassen van de gepaarde t-toets worden de volgende randvoorwaarden aan beide deelreeksen gesteld:

- de beide deelreeksen zijn normaal verdeeld;
- er zijn geen missende waarden meetwaarden in één van beide deelreeksen aanwezig.

7.2.3 HYPOTHESE

Met de t-toets voor gepaarde steekproeven wordt getoetst of de gemiddelden van beide deelreeksen gelijk zijn:

$H_0: \mu_1 = \mu_2$: geen staptrend aanwezig;

$H_A: \mu_1 \neq \mu_2$: staptrend aanwezig.

7.2.4 TOETSINGSGROOTHEID, FORMULES EN KRITIEKE WAARDEN

De toetsingsgrootheid t van de t-toets voor gepaarde steekproeven wordt met behulp van onderstaande formule berekend:

$$t = \frac{\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (x_{A_i} - x_{B_i})}{\frac{S_D}{\sqrt{N}}} \quad (80)$$

Hierin is:

t	de toetsingsgrootheid voor de toets
x_{A_i}, x_{B_i}	meetwaarden van de deelreeksen A respectievelijk B op tijdstip i
N	aantal gepaarde meetwaarden
S_D	standaarddeviatie van de verschillen van de gepaarde meetwaarden

De toetsingsgrootheid t volgt een Student's t -verdeling. De kritieke waarde bij een gegeven onbetrouwbaarheidsniveau α en het berekende aantal vrijheidsgraden ($N-1$) kan worden afgelezen in een tabel voor (rechter) overschrijdingskansen van de Student's t -verdeling. De hypothese H_0 (de gemiddelden zijn gelijk) wordt bij een onbetrouwbaarheidsniveau α geaccepteerd wanneer:

$$|t| < t_{(N-1, 1-\frac{1}{2}\alpha)}.$$

7.2.5 STAPPENPLAN UITVOERING TOETS

De t -toets voor gepaarde steekproeven wordt volgens het onderstaande stappenplan uitgevoerd:

Stap 1: Alle meetwaarden van beide deelreeksen worden naar tijdstip gepaard. Bijvoorbeeld:

<u>deelreeks A</u>	<u>deelreeks B</u>
jan 1990	jan 1993
feb 1990	feb 1993
...	...
dec 1992	dec 1995.

Stap 2: Van alle gepaarde meetwaarden wordt het verschil berekend (§ 3.9).

Stap 3: Van alle verschillen wordt het gemiddelde verschil berekend. Dit levert de term in de teller van formule (80) op.

Stap 4: Van alle in stap 2 berekende verschillen wordt de standaarddeviatie (§ 3.4) berekend. Het resultaat van deze stap is term S_D .

Stap 5: Bereken nu de toetsingsgrootheid t met behulp van formule (80).

Stap 6: Bereken het aantal vrijheidsgraden $N-1$.

Stap 7: De H_0 -hypothese wordt verworpen wanneer de toetsingsgrootheid t groter is dan of gelijk is aan de kritieke waarde bij een gegeven onbetrouwbaarheidsniveau α .

7.2.6 REKENVOORBEELD (CASE)

Case: t -toets voor gepaarde steekproeven

Data: Bergsche Achterplas, totaalafosfaat van 29-11-85 t/m 21-02-90; zie ook § 7.1.6 (case t -toets op verschil in gemiddelden).

Stap 1-2: Zie Tabel 7-1: § 7.1.6 (case t -toets op verschil in gemiddelden)

Stap 3: Gemiddelde verschil: 1.5577

Stap 4: Standaarddeviatie van de berekende verschillen: 0.6112

Stap 5: $t = (1.5577) / (0.6112 / \sqrt{60}) = 19.7$

Stap 6: Aantal vrijheidsgraden: $N-1=59$

Stap 7: Verwerp H_0 indien: $|t| > t_{(N-1, 1-\frac{1}{2}\alpha)}$;

$$t_{(59, 0.975)} = 2.$$

H_0 wordt verworpen omdat $|t| > 2$, de gemiddelden van beide steekproeven zijn ongelijk ($\mu_1 - \mu_2 \neq 0$), er is een staprend aanwezig.

7.3 WILCOXON SIGNED RANK TOETS

7.3.1 INLEIDING

De t-toets voor gemiddelden is een redelijk robuuste toets en kan derhalve ook gebruikt worden wanneer de dataset bij benadering normaal verdeeld is. Wanneer er desondanks twijfels zijn of de t-toets toegepast kan worden, bijvoorbeeld ingeval van seizoensinvloeden, is de non-parametrische Wilcoxon Signed Rank toets een alternatief voor het aantonen van een staptrend.

7.3.2 TOEPASBAARHEID EN BIJZONDERHEDEN

De Wilcoxon Signed Rank toets vereist dat de steekproeven gepaard kunnen worden (gelijke aantallen waarnemingen per jaar) en hieruit volgend dat de meetperioden en frequenties voor beide deelsets overeenkomen.

Voor het toepassen van de Wilcoxon Signed Rank toets worden de volgende randvoorwaarden aan beide deelreeksen gesteld:

- er zijn geen missende meetwaarden in één van beide deelreeksen aanwezig, meetwaarden zonder gepaarde tegenhanger worden verwijderd.

7.3.3 HYPOTHESE

Met de Wilcoxon Signed Rank toets wordt de volgende hypothese getoetst:

H_0 : er is geen staptrend aanwezig;

H_A : er is een staptrend aanwezig.

7.3.4 TOETSINGSGROOTHEID, FORMULES EN KRITIEKE WAARDEN

De toetsingsgrootheid voor de Wilcoxon Signed Rank toets is Z_T . Deze wordt berekend met behulp van onderstaande formule(s):

$$Z_T = \frac{T - \mu_T}{\sigma_T} \quad (81)$$

met:
$$\mu_T = \frac{N(N+1)}{4}$$

en
$$\sigma_T = \sqrt{\frac{N(N+1)(2N+1)}{24}}$$

Hierin is:

Z_T	standaardisatie van de toetsingsgrootheid T
T	de kleinste waarde van het aantal rangnummers van respectievelijk de positieve (T^+) en de negatieve (T^-) verschillen
N	aantal getallenparen in de toets

De toetsingsgrootheid Z_T volgt een standaard normale verdeling. De kritieke waarde bij een gegeven onbetrouwbaarheidsniveau α kan worden afgelezen in een tabel voor (rechter) overschrijdingskansen van de standaard normale verdeling. De hypothese H_0 (de gemiddelden zijn gelijk $\Rightarrow$ geen staprend) wordt bij een onbetrouwbaarheidsniveau α geaccepteerd wanneer $|Z_T| < Z_{(1-\frac{1}{2}\alpha)}$.

7.3.5 STAPPENPLAN UITVOERING TOETS

De toetsingsgrootheid voor de Wilcoxon Signed Rank toets is Z_T . Deze wordt op de volgende wijze berekend:

- Stap 1: Bereken voor ieder getallenpaar het verschil in meetwaarde.
- Stap 2: Rangschik deze verschillen naar hun **absolute** waarde en ken naar grootte een rangnummer toe waarbij het kleinste verschil rangnummer 1 krijgt (§ 3.10).
- Stap 3: Plaats + en - tekens voor de rangnummers wanneer de verschillen respectievelijk positief en negatief zijn.
- Stap 4: De som van de positieve rangnummers resulteert in T^+ , de (absolute) som van de negatieve rangnummers geeft T^- .
- Stap 5: T wordt vervolgens gevonden door de kleinste waarde van T^+ of T^- te kiezen.
- Stap 6: Bereken μ_T volgens formule (81).
- Stap 7: Bereken σ_T volgens formule (81).
- Stap 8: Bereken Z_T volgens formule (81).
- Stap 9: Met de grootheid Z_T wordt bij een gegeven betrouwbaarheidsniveau $(1-\alpha)$ de hypothese bevestigd (H_0 is waar) of verworpen (H_1 is waar).

7.3.6 REKENVOORBEELD (CASE)

Case: Wilcoxon Signed Rank toets voor gepaarde steekproeven

Data: Bergsche Achterplas, totaalfosfaat van 29-11-85 t/m 21-02-90; zie ook § 7.1.6 (case t-toets op verschil in gemiddelden).

- Stap 1-3: Zie Tabel 7-1¹¹: § 7.1.6 (case t-toets op verschil in gemiddelden).
- Stap 4: Som van de positieve rangnummers: $T^+=1830$;
som van de negatieve rangnummers: $T^-=0$.
- Stap 5: T^- is kleiner dan T^+ , hieruit volgt: $T=0$
- Stap 6: $\mu_T=(60 \times 61)/4=915$
- Stap 7: $\sigma_T=[(60 \times 61 \times 121)/24]^{1/2}=135.8$
- Stap 8: $Z_T=(0 - 915)/135.8=-6.73$
- Stap 9: Bij $\alpha=0.05$ is bij een tweezijdige toets de kritieke waarde $Z_{(1-\frac{1}{2}\alpha)}=1.960$.
Aangezien $|Z_T| \geq Z_{(1-\frac{1}{2}\alpha)}$ wordt H_0 verworpen, er is een staprend.

¹¹ In dit geval zijn alle verschillen van nature positief, de rangnummers worden toegekend op de absolute verschillen.

7.4 WILCOXON RANK SUM TOETS

7.4.1 INLEIDING

De Wilcoxon Rank Sum toets kan in tegenstelling tot de Wilcoxon Signed Rank toets worden gebruikt wanneer de beide deelreeksen in aantal niet even groot zijn. Deze toets is een nonparametrisch alternatief voor de t-toets voor gemiddelden. De Wilcoxon Rank Sum toets is ook bekend als de Mann-Whitney toets.

7.4.2 TOEPASBAARHEID EN BIJZONDERHEDEN

De Wilcoxon Rank Sum toets is ongevoelig voor meetwaarden lager dan de detectielimiet. Deze hoeven derhalve niet uit de deelreeksen te worden verwijderd, maar krijgen het zelfde rangnummer.

Aan het toepassen van de Wilcoxon Rank Sum toets stelt de volgende eisen aan de beide deelreeksen:

- De varianties van beide deelreeksen zijn aan elkaar gelijk (de verdelingen van de beide deelreeksen hebben een identieke vorm);
- De deelreeksen dienen vrij te zijn van seizoensinvloeden (Phillips, 1988).

7.4.3 HYPOTHESE

Met de Wilcoxon Rank Sum toets wordt de volgende hypothese getoetst:

H_0 : er is geen staptrend aanwezig: de deelreeksen hebben het zelfde gemiddelde;

H_A : er is een staptrend aanwezig: het gemiddelde van beide deelreeksen is niet gelijk.

7.4.4 TOETSINGSGROOTHEID FORMULES EN KRITIEKE WAARDEN

De toetsingsgrootte voor de Wilcoxon Rank Sum toets is Z_{rs} , waarbij:

$$Z_{rs} = \frac{W_{rs} - 0.5 \times n_1(N+1)}{\sqrt{\frac{n_1 n_2 (N+1)}{12}}} \quad (82)$$

$$Z_{rs} = \frac{W_{rs} - 0.5 \times n_1(N+1)}{\sqrt{\frac{n_1 n_2}{12} \left[N+1 - \frac{\sum_{j=1}^g t_j(t_j^2-1)}{N(N-1)} \right]}} \quad (83)$$

Hierin is:

Z_{rs}	standaardisatie van de toetsingsgrootheid W_{rs}
W_{rs}	som van de rangnummers van de deelreeksen met n_i waarnemingen
N	totaal aantal meetwaarden in de toets: $N=n_1+n_2$
n_1	aantal waarnemingen in deelreeks 1
n_2	aantal waarnemingen in deelreeks 2
g	aantal groepen van meetwaarden met het zelfde rangnummer
j	indexnummer voor aantal groepen van meetwaarden met het zelfde rangnummer
t_j	aantal meetwaarden met het zelfde rangnummer in groep j

Wanneer het aantal meetwaarden in beide deelreeksen groter is dan 10 ($n_1 > 10$ en $n_2 > 10$) volgt de toetsingsgrootheid Z_{rs} een standaard normale verdeling. De kritieke waarde bij een gegeven onbetrouwbaarheidsniveau α kan worden afgelezen in een tabel voor (rechter) overschrijdingskansen van de standaard normale verdeling. De hypothese H_0 wordt geaccepteerd wanneer $|Z_{rs}| < Z_{(1-\frac{1}{2}\alpha)}$. Voor kritieke waarden indien $n_1 \leq 10$ en $n_2 \leq 10$ wordt naar de vakliteratuur verwezen (Hollander en Wolfe, 1973).

7.4.5 STAPPENPLAN UITVOERING TOETS

De toetsingsgrootheid Z_{rs} wordt volgens onderstaand stappenplan berekend:

Stap 1: Beschouw de beide deelreeksen als één dataset met $N=n_1+n_2$ meetwaarden en ken rangnummers toe zoals beschreven in § 3.10.

Stap 2: Bereken het totaal van de rangnummers van de 1^e deelreeks (met n_1 meetwaarden).

Stap 3: Wanneer geen gelijke rangnummers (gelijke meetwaarden) in beide deelreeksen voorkomen, bereken Z_{rs} volgens formule (82). Als er in (een van) beide deelreeksen rangnummers voorkomen, gebruik dan formule (83).

De hypothese H_0 (de gemiddelden zijn gelijk $\Rightarrow$ geen staptrend) wordt bij een onbetrouwbaarheidsniveau α geaccepteerd wanneer $|Z_{rs}| < Z_{(1-\frac{1}{2}\alpha)}$. Voor kritieke waarden indien $n_1 \leq 10$ en $n_2 \leq 10$ wordt naar de vakliteratuur verwezen (Hollander en Wolfe, 1973).

7.4.6 REKENVOORBEELD (CASE)

De uitvoering van de Wilcoxon Sum Rank toets wordt met behulp van het hierna volgende voorbeeld toegelicht.

Als de rangnummers voor deelreeks 1 worden opgeteld, wordt W_{rs} gelijk aan 500 ($5+7+9.5+\dots+38+40=500$). In de beide deelreeksen komen 6 groepen met hetzelfde rangnummer voor (9.5, 11.5, 13.5, 16, 18.5 en 25). Dit betekent dat formule (83) moet worden toegepast met $g=6$. Vier van de 6 groepen bestaan ieder uit 2 meetwaarden ($t=2$) met de rangnummers 9.5, 11.5, 13.5 en 18.5 en twee groepen tellen ieder 3 meetwaarden ($t=3$) met de rangnummers 16 en 25. Toetsingsgrootheid Z_{rs} wordt nu volgens formule (83):

$$Z_{rs} = \frac{500 - 0.5 \times 20(40+1)}{\sqrt{\frac{20 \times 20}{12} \left[41 - \frac{2 \times 3 + 2 \times 3 + 2 \times 3 + 2 \times 3 + 3 \times 8 + 3 \times 8}{40(40-1)} \right]}}$$

$$Z_{rs} = 2.44$$

Bij een onbetrouwbaarheidsniveau $\alpha=0.05$ is de kritieke waarde van de standaardnormaalverdeling $Z=1.96$. Omdat $|Z_{rs}|\geq 1.96$ is, wordt de H_0 -hypothese verworpen. In dit voorbeeld is met een onbetrouwbaarheid van 0.05 (5%) een significante staptrend aanwezig.

Tabel 7-3: Dataset

Deelreeks 1		deelreeks 2	
meetw.	Rank ¹²	meetw.	rank
0.0059	5	-0.011 ¹³	1
0.0074	7	-0.0088	2
0.015	9.5	-0.0055	3
0.018	13.5	0.0056	4
0.019	16	0.0063	6
0.019	16	0.013	8
0.024	21	0.015	9.5
0.031	25	0.016	11.5
0.031	25	0.016	11.5
0.034	27	0.018	13.5
0.036	28	0.019	16
0.040	29	0.020	18.5
0.042	30	0.020	18.5
0.045	31	0.022	20
0.046	32	0.025	22
0.053	34	0.030	23
0.062	36	0.031	25
0.066	37	0.050	33
0.069	38	0.057	35
0.081	40	0.073	39

¹² Rangnummer in de gehele dataset.

¹³ Meetwaarden onder de aantoonbaarheidsgrens zijn als negatieve waarden van de aantoonbaarheidsgrens weergegeven.

8 VRACHTEN

8.1 INLEIDING

Kennis over de stofstromen in en uit een systeem is belangrijk voor beleidsevaluatie en beleidsvorming. In de laatste jaren neemt de aandacht voor vrachtbepaling toe doordat op internationaal niveau verdragen zijn gesloten met betrekking tot de belasting van bijvoorbeeld de Noordzee.

Over vrachtberekeningen is inmiddels veel gepubliceerd. Voor het natuurlijk milieu is de literatuur echter sterk beperkt tot vrachtbepaling in grotere rivieren (o.a. Klavers en de Vries, 1992). Daarnaast bestaat kennis over vrachten uit puntbronnen. Binnen de geraadpleegde bibliotheken zijn geen relevante wetenschappelijke publicatie gevonden met betrekking tot vrachtbepalingen in kleinere systemen (bijv. beekjes en sloten) en gebieden waar water via sluizen en gemalen wordt in- en/of uitgelaten. In Nederland zijn juist deze situaties voor de regionale beheerder van belang.

In dit hoofdstuk worden verschillende aspecten van vrachtbepaling aan de orde gesteld. In § 8.2 komen eerst wat definities en begrippen aan de orde. Vervolgens wordt aandacht besteed aan enkele aspecten van bemonstering (§ 8.3). In § 8.4 wordt ingegaan op de relatie tussen concentratie en debiet, welke belangrijke consequenties kan hebben voor de te gebruiken vrachtberekeningsmethode. Na de beschrijving van gangbare en minder gangbare vrachtberekeningsmethoden (§ 8.5) wordt in § 8.5.2 ingegaan op de geschiktheid van deze methoden. In § 8.6 wordt achtereenvolgens kort ingegaan op de mogelijkheden om vrachten van gebieden waar niet is gemeten, te schatten op basis van resultaten van andere (vergelijkbare) gebieden, en op het nut van vrachten voor het formuleren en evalueren van beleid. Tenslotte wordt in § 8.7 met behulp van enkele *cases* het toepassen van vrachtberekeningsmethoden uitgewerkt. Verschillende berekeningsmethoden voor vrij afstromende wateren worden geëvalueerd met behulp van de *case* 'Mosbeek' (§ 8.7.1) en voor gemalen met draaiuren in de *case* 'Gemaal Vierhuis' (§ 8.7.2).

Naast de artikelen waarnaar expliciet wordt gerefereerd, stoelt hoofdstuk 8 vooral op de publicatie van Littlewood (1992) en die van Klavers en de Vries (1992).

8.2 DEFINITIES

In Kader 8-1 worden de belangrijkste begrippen nader toegelicht.

Kader 8-1

<u>curve-fitting:</u>	het vaststellen van een niet-lineair verband tussen twee variabelen middels regressie-technieken. De meest bekende (causale) niet-lineaire verbanden zijn de logaritmische, kwadratische, exponentiële en machtreksen.
<u>hysteresis-effect:</u>	het hysteresis-effect houdt in dat de verandering van de concentratie <u>binnen eenzelfde afvoergolf</u> tijdens toenemend debiet anders verloopt dan tijdens afnemend debiet.
<u>history-effect:</u>	het effect dat (over het algemeen hydrologische) gebeurtenissen - voorafgaande aan een afvoergolf, bijvoorbeeld een eerdere afvoergolf - invloed hebben op concentratie debiet relaties.
<u>momentane vracht:</u>	de momentane vracht is de stofflux die op een bepaald tijdstip t het dwarsprofiel passeert; ze wordt berekend als het product van de concentratie met het debiet Voor een nauwkeurige berekening van deze grootheid zijn dus nauwkeurige debiet- en concentratiemetingen nodig. Bij een ideaal gemengd systeem is de concentratie over het gehele dwarsprofiel gelijk en kan volstaan worden met een enkele concentratiemeting over het dwarsprofiel. Zwevende stof vertoont echter regelmatig gradiënten over het dwarsprofiel (o.a. Hellmann, 1986). Voor een nauwkeurige vrachtbepaling moet hier eventueel rekening mee gehouden worden. Aangezien de stroomsnelheid, en daarmee het debiet, eveneens een gradiënt over het dwarsprofiel vertoont, vormt de bepaling van een momentane zwevend stofvracht, alsmede die van alle aan zwevend stofgebonden stoffen een probleem op zich.
<u>nauwkeurigheid vrachtberekeningsmethode:</u>	de nauwkeurigheid heeft betrekking op de systematische afwijking van de berekende waarde ten opzichte van de werkelijke waarde, en is veelal in het geding wanneer steekmonsters niet representatief zijn voor het feitelijke debiet.
<u>netto vracht:</u>	de netto vracht is die vracht die, nadat gecorrigeerd is voor variërende stroomrichting, per saldo één kant opgaat.
<u>precisie vrachtberekeningsmethode:</u>	de precisie van een methode heeft betrekking op de betrouwbaarheid van de berekende waarde. Bij een precieze vracht is het betrouwbaarheidsinterval rond het gemiddelde klein, bij een niet precieze vracht is het interval groot. De ideale berekeningsmethode is precies en nauwkeurig. De precisie kan alleen bepaald worden als de werkelijke vracht bekend is: dit betekent dat de precisie moeilijk te bepalen is.
<u>seizoensinvloed:</u>	effect van het seizoen op de berekende dagvracht. Seizoensinvloeden kunnen ingrijpen op kwaliteitsvariabelen, maar ook op het debiet. Dit kan leiden tot een complex vrachtverloop, omdat tijdstippen waarop en de mate waarin het effect optreedt, voor kwaliteitsvariabelen en debiet verschillend kunnen zijn. Indien een factor van betekenis, dient de seizoensinvloed derhalve te worden meegenomen bij het opstellen van een debiet-concentratie-relatie.
<u>vracht:</u>	de hoeveelheid (massa) die van een bepaalde stof binnen een bepaald tijdsbestek een bepaalde meetpunt passeert.
<u>vrachtberekeningsmethode:</u>	de vrachtberekeningsmethode is de berekeningswijze op grond waarvan uit kwantiteits- en kwaliteitsmetingen in de tijd, de vracht over een bepaald tijdsbestek wordt bepaald.

8.3 BEMONSTERING

8.3.1 DEBIET

In het algemeen worden vrachten berekend op discontinue meetreeksen. Debieten kunnen continu worden gemeten. In de praktijk zal het uit kostenoverwegingen echter veelal niet mogelijk zijn om op alle relevante meetpunten continue debietmetingen uit te voeren. Ongeacht het feit of debieten continu gemeten worden, moet aandacht besteed worden aan de meetfout van deze metingen. De nadruk bij de ijking van geautomatiseerde meetinstallaties moet liggen op het voorkomen van systematische afwijkingen van het gemeten debiet ten opzichte van het werkelijke debiet. Dit heeft namelijk een systematische afwijking van de gemeten vracht tot gevolg. Een uitgebreide beschrijving van verschillende methoden voor zowel incidentele en continue debietmetingen in open waterlopen is gegeven in STOWA, 1994.

Afhankelijk van het systeem, kan een belangrijk deel van het totale debiet in betrekkelijk korte tijd worden afgevoerd. Bij de inrichting van meetcampagnes dient met dit gegeven rekening te worden gehouden. Het 'missen' van de afvoergolf kan immers een groot effect hebben op de berekening van het totale gepasseerde volume.

8.3.2 DRAAIUREN GEMALEN

In Nederland is er in het waterbeheer vaak sprake van een gemaal dat het waterpeil in een polder regelt. Van dergelijke gemalen wordt, over het algemeen, de opvoerhoogte (h), het vermogen en het aantal draaiuren (d_{min}) bijgehouden. Daarnaast worden gemalen regelmatig geijkt, waarbij een Q - h relatie wordt opgesteld. Dit alles levert een goede basis voor vrachtberekeningen. De kern van de vrachtberekening zal dan ook het verpompte volume water (m^3) moeten zijn. De formule hiervoor luidt:

$$Q_p \times d_{min}$$

8.3.3 CONCENTRATIE

Continue concentratiemetingen zijn in de praktijk slechts zelden mogelijk. Weliswaar neemt het aantal ion-selectieve elektroden toe, de betreffende variabelen zijn echter slechts beperkt relevant voor het beleid.

Een goed alternatief voor continu meten is het uitvoeren van debiet- of volumeproportionele bemonstering. Deze vorm van bemonsteren geeft een goed beeld van de kwaliteit van het water dat binnen een bepaald tijdbestek een meetpunt is gepasseerd. Bij het kiezen voor debietproportionele bemonstering kan de monsteropslag/-conservering een kritieke rol spelen, waardoor deze wijze van bemonstering voor sommige variabelen ongeschikt is (bijv. door snelle omzetting).

Indien er alleen mogelijkheden tot het nemen van steekmonsters bestaan, terwijl de concentratie met de afvoer varieert, dan moet dynamisch met monitoring worden omgegaan. De grootste vrachten kunnen immers in relatief korte perioden een meetpunt passeren.

Andere bemonsteringsstrategieën zijn *probability sampling* en *real time updated stratified sampling*. Het voert te ver om voornoemde bemonsteringsmethoden hier uitgebreid te beschrijven (zie hiervoor en voor verdere verwijzingen: Littlewood, 1992). Gemeenschappelijk kenmerk van deze methoden is de hoge mate van dynamiek bij de monsternamen.

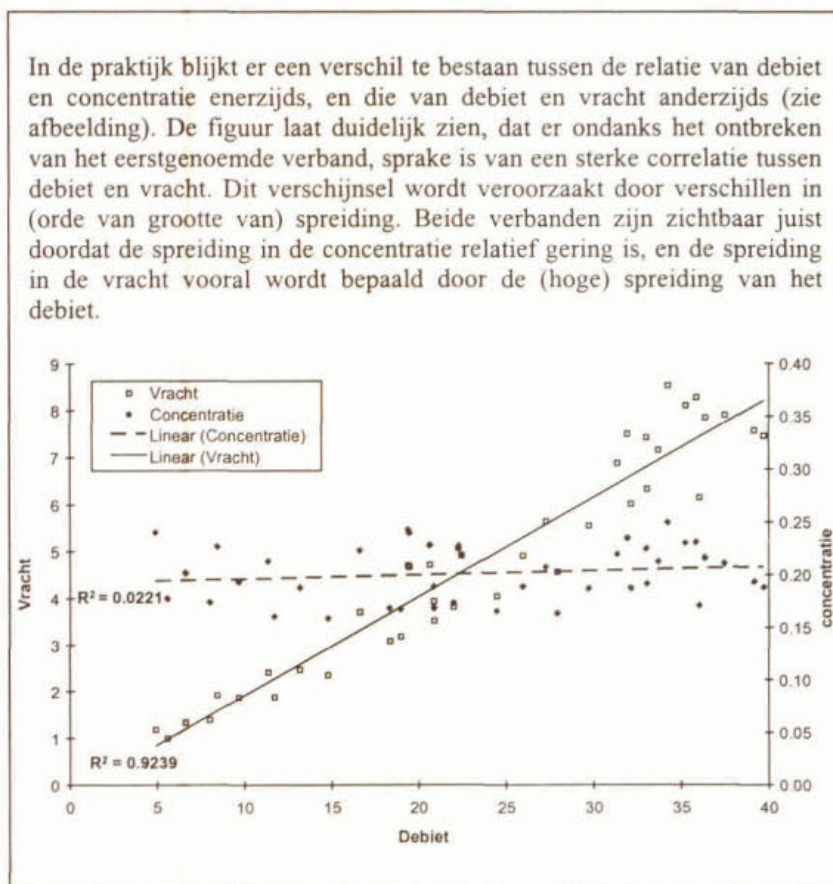
De keuze van de bemonsteringsmethode hangt af van de gewenste nauwkeurigheid. Indien de concentratie constant is zal steekbemonstering voldoende zijn, naarmate er grotere seizoens- en debietafhankelijkheden bestaan zal volumeproportionele bemonstering noodzakelijk zijn.

8.4 DE RELATIE TUSSEN DEBIET EN CONCENTRATIE

Indien de debietgegevens nagenoeg continu beschikbaar zijn, maar de concentratie minder frequent is gemeten, kan de concentratie soms geschat worden op basis van een relatie met het debiet. Hiervoor kan de concentratie uitgezet worden tegen het debiet. Zou hiervoor in plaats van de concentratie de vracht worden gebruikt, dan blijkt uit de praktijk dat voornoemd verband wordt overschat (Kader 8-2).

Een duidelijk verband tussen debiet en concentratie wordt vaak verdoezeld door het zogenaamde hysteresis-effect (o.a. Hellmann, 1986). Dit fenomeen houdt in, dat binnen eenzelfde afvoergolf het concentratieverloop bij toenemende afvoer anders verloopt dan bij afnemende afvoer, bijvoorbeeld doordat de concentratie bij toenemende afvoer sneller stijgt dan deze bij afnemende afvoer daalt (Figuur 8-1).

Kader 8-2



Ongeacht de wiskundige vorm van de relatie kunnen de mogelijke relaties kwalitatief als volgt worden omschreven:

1. Stijgende concentratie bij stijgend debiet, dalende concentratie bij dalend debiet: het uitspoelings- of opwervelingseffect.

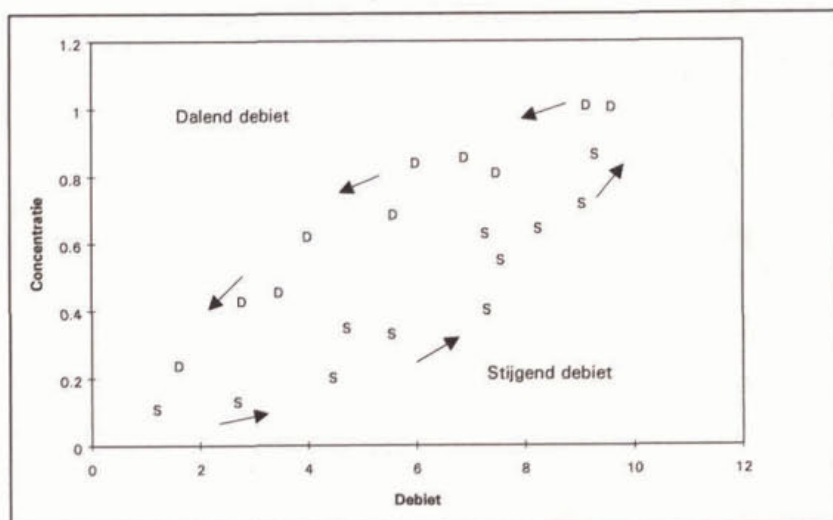
In veel gevallen zal de concentratie van een variabele toenemen als het debiet toeneemt. Hierbij valt te denken aan zwevende stof: bij toenemend debiet, en diensgevolge stroomsnelheid, zal een toenemende hoeveelheid sediment getransporteerd worden. Zodra de stroomsnelheid daalt zal door bezinking de concentratie weer afnemen. Dit voorbeeld houdt impliciet in, dat aan zwevende stof gebonden stoffen ook een positieve relatie met de stroomsnelheid vertonen.

Een ander voorbeeld is de uitspoeling van nutriënten. Indien de verhoogde afvoer veroorzaakt wordt door sterke neerslag, zal een toenemende hoeveelheid stoffen van landbouwgronden af- en uitspoelen: indien de concentratie in het water dat uitspoelt hoger is dan in het ontvangende water, zal bij stijgend debiet de concentratie eveneens toenemen. Indien de concentratie in het water dat uitspoelt lager is dan in het ontvangende water, zal bij stijgend debiet de concentratie juist dalen.

2. Dalende concentratie bij stijgend debiet, stijgende concentratie bij dalend debiet: het verdunningseffect.

Wanneer de bronnen van stoffen onafhankelijk zijn van neerslag of stroomsnelheid, treedt er verdunning van de stof op. Hierbij valt bijvoorbeeld te denken aan een lozingspunt van de industrie: de vracht zal in het algemeen constant in de tijd zijn,

terwijl het volume waarop de lozing plaatsvindt (het debiet) varieert. Bij een stijgend debiet treedt extra verdunning van de lozing op, bij dalend debiet wordt de verontreiniging geconcentreerd. Het verdunningseffect kan ook optreden door uitputting van de bron. Een sprekend voorbeeld is slibtransport: bij een langdurige hoge afvoer is het mogelijk dat al het lichte slib getransporteerd is.



Figuur 8-1: Illustratie van het hysteresiseffect

3. Geen relatie.

De bovenstaande relaties (1. en 2.) zijn uitersten. Het is mogelijk dat er geen enkele relatie bestaat. Dit is bijvoorbeeld het geval, indien de kwaliteit van het 'extra' water dat afgevoerd wordt, niet sterk afwijkt van de kwaliteit van het water tijdens basisafvoer. Bij het inlaten van water uit een groot reservoir, bijvoorbeeld het IJsselmeer, zal de concentratie niet afhankelijk zijn van het debiet, waarmee het water ingelaten wordt.

Het is helaas niet mogelijk om per variabele aan te geven of, en wat voor relatie er tussen debiet en afvoer bestaat. In stedelijk gebied zal stikstof dat via rioolwaterzuiveringsinstallaties het oppervlaktewater bereikt, een verdunningseffect vertonen, terwijl in landelijk gebied door uit- en afspoeling een uitspoelingseffect te verwachten is.

Het hysteresiseffect verdoezelt mogelijk bestaande relaties op de kleinste tijdschaal, namelijk die binnen een en dezelfde afvoergolf. Ook de periode vóór de afvoergolf kan een verdoezelend effect op concentratie-debiet relaties hebben. Bij gebrek aan een algemeen geaccepteerde benaming wordt hier het begrip history-effect geïntroduceerd. Belangrijk zijn de frequentie en intensiteit van voorafgaande afvoergolven. Zo zal bij twee elkaar opvolgende perioden van hoge afvoer de piekconcentratie van zwevende stof verschillen, indien bij de eerste hoge afvoer veel sediment is afgevoerd en dit niet is aangevuld. De uit- en afspoeling van nutriënten uit landbouwgronden zal ook variëren naarmate er meer neerslagperiodes aan de meetperiode zijn voorafgegaan.

Tenslotte kan het seizoenseffect een eventuele relatie tussen debiet en concentratie verdoezelen. De stikstofconcentratie zal in het algemeen in het voorjaar hoger zijn dan in het najaar. Bij eenzelfde afvoer leidt dit tot verschillende concentraties. In dit geval lijkt er dus geen sprake te zijn van een

verband tussen debiet en concentratie. Indien variabelen een geprononceerde seizoeninvloed vertonen, zal de relatie tussen debiet en concentratie per seizoen moeten worden bepaald.

8.5 BEREKENINGSMETHODEN

8.5.1 ALGEMENE BENADERING VOOR DE BEREKENING VAN VRACHTEN

De berekening van vrachten is op papier een eenvoudige zaak: de momentane vracht is het product van het momentane debiet en de concentratie. Over een bepaald tijdsbestek ($t_1 - t_2$) wordt de vracht vervolgens bepaald door:

$$Vracht = K \int_{t_1}^{t_2} c_t Q_t dt \quad (84)$$

Hierin is:

c	de concentratie
Q	het debiet
t	de tijd
K	een omrekeningsconstante voor eenheden.

Bovenstaande formule levert de meest exacte vracht op, indien concentratie en debiet continu gemeten worden. Willekeurige meetfouten, systematische afwijkingen en gradiënten over dwarsprofielen hebben tot gevolg dat de vracht nooit exact bepaald kan worden.

Helaas is het in het algemeen niet mogelijk concentratie en debiet continu te meten. Indien hoogfrequente metingen mogelijk zijn, en wanneer de tijdsintervallen tussen metingen constant zijn, wordt de beste benadering van de vracht gegeven door:

$$Vracht = K \Delta t \sum_{i=1}^n c_i Q_i \quad (85)$$

Hierin is:

Δt	de periode tussen twee metingen
I	de indexering van de tijd

Indien weliswaar hoogfrequent gemeten wordt maar niet op equidistante tijdstippen wordt de vracht berekend middels:

$$Vracht = K \sum_{i=1}^n \Delta t_i c_i Q_i \quad (86)$$

Hierin is:

Δt_i	de breedte van het tijdsinterval rond $c_i Q_i$
--------------	---

In de praktijk zal de meetfrequentie in het algemeen ontoereikend zijn om bovenstaande formules te mogen en kunnen toepassen. Om deze reden zijn diverse andere vrachtberekeningsmethoden

ontwikkeld, toegepast en beoordeeld. Onderscheid kan gemaakt worden tussen interpolatiemethoden, die toegepast kunnen worden indien concentraties of debietmetingen niet continu beschikbaar zijn, en 'overige' methoden (§ 8.5.3 respectievelijk § 8.5.4).

8.5.2 KEUZE BEREKENINGSMETHODE

Meetinspanningen behoren te zijn afgestemd op de informatiebehoefte van het beleid. Indien de informatiebehoefte gekwantificeerd is, ligt daarmee in het algemeen ook de berekeningswijze vast. In veel gevallen zullen echter gegevens beschikbaar zijn, die niet afgestemd zijn op specifieke informatiedoelen of berekeningswijzen. In voorkomende gevallen dient zich vervolgens de vraag aan, welke berekeningswijze het meest geschikt is om te worden toegepast. In de eerste plaats hangt de keuze van de methode af van de beschikbare data (Tabel 8-1).

Tabel 8-1: Globale richtlijnen voor toe te passen vracht- en concentratieberekeningsmethoden

Concentratie	debiet	vrachtmethode	conc.-methode
laagfrequent	idem	1 ¹⁴ , 2	
laagfrequent	laagfrequent maar regelmatig dan de concentratie	1 ¹⁴ , 2	
laagfrequent	(vrijwel) continu	3, 4, 5 ¹⁵	
matig tot hoogfrequent.	regelmatiger dan de concentratie	1 ¹⁵	alle in § 8.5.5 genoemde
matig tot hoogfrequent.	(vrijwel) continu	3, 4, 5	alle in § 8.5.5 genoemde

Een tweede belangrijke factor bij de keuze van de methode is het verband tussen de concentratie en het debiet. Door de concentratie tegen het debiet uit te zetten kan een indruk verkregen worden van de vorm van een eventuele relatie tussen concentratie en vracht. Via *curve fitting* kunnen de benodigde parameters voor een verband tussen concentratie en debiet geschat worden (lineaire regressie indien het verband lineair is)¹⁶. Indien er geen relatie bestaat tussen de concentratie en het debiet kunnen de zogenoemde niet-gebiedsgewogen methoden toegepast worden. Dit zijn de methoden 1 t/m 4.

In de literatuur is geen eenduidig antwoord te vinden over de geschiktheid van verschillende vrachtberekeningsmethoden. Verschillende onderzoekers hebben verschillende methoden naast elkaar gezet. Hierbij is met name ingegaan op de vijf in § 8.5.3 beschreven methoden (Kader 8-3).

De overige methoden zijn slechts incidenteel onderzocht en daarbij niet vergeleken met de methoden 1 t/m 5.

¹⁴ Concentratie- en debietmetingen behoeven niet perse gelijktijdig te hebben plaatsgevonden.

¹⁵ Voor het kunnen afleiden van concentraties op basis van een relatie tussen concentratie en debiet dient op voorhand al een relatief groot aantal concentraties beschikbaar te zijn, teneinde van een betrouwbare relatie te kunnen uitgaan.

¹⁶ Het betreft hier een verband tussen concentratie en debiet. Dit is niet hetzelfde als een verband tussen momentane vracht (flux) en debiet. Flux en debiet zijn per definitie van elkaar afhankelijk: Het verband is duidelijker naarmate de variatie in concentratie laag is ten opzichte van de variatie in het debiet.

Ten aanzien van de gebruiksmogelijkheden van de verschillende vrachtberekeningsmethoden concluderen Webb et al. (1997) dat zowel methode 1 als 4 voldoet, indien de gemiddelde concentratie de debietgewogen concentratie niet systematisch over- of onderschat. Diverse andere auteurs komen ook tot deze, voor de hand liggende, conclusie (o.a. Yaksich en Verhoff, 1983). De methoden 2, 3 en 5 voldoen, indien de afvoergewogen concentratie representatief is gemeten.

Klaver en de Vries (1992) concluderen, dat voor vrachtbepalingen in Maas en Rijn, de directe en de gewogen concentratie-methode (respectievelijk methode 2 en 5) nog het best voldoen, omdat deze methoden het meest constant zijn in zowel nauwkeurigheid als precisie, daar waar alternatieve methoden met een hogere precisie doorgaans tijdvariabele systematische afwijkingen vertonen en omdat de methoden 2 en 5 de laagste systematische afwijking opleveren. Een onderlinge vergelijking van deze beide methoden leert, dat met uitzondering van chloride in de Rijn, met de gewogen concentratie-methode de beste resultaten worden verkregen.

De *Oslo and Paris Commission on marine pollution* (1992) adviseert voor de berekening van vrachten het gebruik van methode 2 of 5.

Reinelt en Grimvall (1992) hebben vier verschillende vrachtberekeningsmethoden vergeleken (zie onderstaande matrix). De sterke en zwakke punten zijn hieronder weergegeven.

	Recht-toe- recht-aan	Interpolatie methode	Lineaire regressie	Log Q en c & lineaire regressie
data				
- sterke correlatie tussen Q en c	O	O	+	+
- zwakke correlatie tussen Q en c	O	O	-	-
- geen extreme gebeurtenissen tijdens periode	+	+	O	O
- enkele gemonitorde, extreme gebeurtenissen in meetperiode	O	O		
- enkele niet-gemonitorde, extreme gebeurtenissen in meetperiode	-	-	-	-
bronnen				
- geen significante puntbronnen	O	O	+(a)	+(a)
- significante puntbronnen aanwezig	O	O	O(b)	O(b)
tijdsbestek vrachtbepaling				
- per seizoen of jaar	O	O	+(a)	+(a)
- per dag of week	-	-	+(a)	+(a)
Legenda:				
-	methode niet toepasbaar			
O	methode redelijk toepasbaar			
+	methode geschikt			
(a)	Bij de regressiemethode wordt ervan uitgegaan dat het verband redelijk is. Er moet onderzocht worden of de correlatie door de jaren en per seizoen variëren.			
(b)	Bij significante puntbronnen leidt hogere afvoer tot verdunning, met bijgevolg een negatieve correlatie. Debieten worden continu gemeten.			

8.5.3 INTERPOLATIEMETHODEN TER BEREKENING VAN VRACHTEN

Voor de berekening van vrachten zijn interpolatiemethoden het meest gangbaar. In de paragrafen 8.5.3.1 t/m 8.5.3.5 wordt nader op een vijftal van deze methoden ingegaan. De toepasbaarheid van een methode hangt onder meer af van de relatie tussen debiet en concentratie.

8.5.3.1 METHODE 1: 'RECHT-TOE-RECHT-AAN' METHODE

Bij de recht-toe-recht-aan methode wordt aangenomen dat concentratie en debiet onafhankelijk van elkaar zijn. Om de jaarvracht te berekenen worden het gemiddelde debiet en de gemiddelde concentratie onafhankelijk van elkaar berekend. In formule:

$$Vrucht = K\bar{c}\bar{Q} = \bar{c}(d_{min}Q^h) \quad (87)$$

Hierin is:

K	conversie factor om rekening te houden met verschillende eenheden
$\bar{c}$	gemiddelde concentratie
$\bar{Q}$	gemiddeld debiet
d_{min}	aantal draaiuren
Q^h	debiet per draaiuur

Het voordeel van deze methode is dat het aantal debiet- en concentratiemetingen niet gelijk hoeft te zijn. Indien er een relatie tussen debiet en concentratie bestaat geeft deze methode echter een systematische fout. Indien geen relatie tussen debiet en concentratie bestaat, hangt de precisie van methode af van de temporele variabiliteit van deze grootheden.

Nauwkeurigheid

Het is mogelijk een schatting van het betrouwbaarheidsinterval rond de berekende vrucht te berekenen indien:

- de (getransformeerde) concentratiemetingen een normale verdeling volgend en onderling onafhankelijk zijn;
- de (getransformeerde) debietmetingen een normale verdeling volgen en onderling onafhankelijk zijn;
- de concentratiemetingen en debietmetingen onafhankelijk van elkaar zijn.

Het betrouwbaarheidsinterval rond de vrucht wordt gegeven door:

$$K\left(\bar{c}\bar{Q} - t_{(\frac{1}{2}\alpha, N-1)}\sqrt{\frac{s_v^2}{N}}\right) \leq K\bar{c}\bar{Q} \leq K\left(\bar{c}\bar{Q} + t_{(\frac{1}{2}\alpha, N-1)}\sqrt{\frac{s_v^2}{N}}\right) \quad (88)$$

Hierin is:

$K\bar{c}\bar{Q}$	vrucht
$t_{(\frac{1}{2}\alpha, n-1)}$	de waarde uit de student t-tabel bij overschrijdingskans $\frac{1}{2}\alpha$ en $n-1$ vrijheidsgraden

Indien niet aan de randvoorwaarden wordt voldaan is het betrouwbaarheidsinterval onnauwkeurig. Het is helaas niet mogelijk aan te geven of het werkelijke betrouwbaarheidsinterval breder of juist minder breed is dan het berekende betrouwbaarheidsinterval.

Aangezien concentratie en debiet niet gepaard beschikbaar zijn, is het niet mogelijk de grootheid s^2 direct te bepalen. De variantie s_v^2 in de concentratie- en debietmetingen (respectievelijk s_c^2 en s_Q^2) en de gemiddelde waarden ($\bar{c}$; $\bar{Q}$) zijn echter wel bekend. De standaardafwijking s_v^2 in de gemiddelde vrucht ($\bar{V}$) kan vervolgens bepaald worden via de relatie:

$$\left(\frac{s_v}{\bar{v}}\right)^2 = \left(\frac{s_c}{\bar{c}}\right)^2 + \left(\frac{s_Q}{\bar{Q}}\right)^2 \quad (89)$$

$$\Leftrightarrow s_v = \bar{c} \bar{Q} \sqrt{\left(\frac{s_c}{\bar{c}}\right)^2 + \left(\frac{s_Q}{\bar{Q}}\right)^2}$$

Het aantal waarden N waarover de vracht berekend is, is gelijk aan K . Indien debiet en concentratiemetingen op dagbasis gemeten zijn, is de vracht $365 \times \bar{c} \times \bar{Q}$ en is N in de formule voor het betrouwbaarheidsinterval gelijk aan 365^{17} .

8.5.3.2 METHODE 2: 'DIRECTE' METHODE

In tegenstelling tot de in de vorige paragraaf behandelde 'recht-toe-recht-aan' methode zijn bij de directe methode debiet en concentratie wel aan elkaar gekoppeld. De vracht wordt als volgt berekend:

$$Vracht = K \left(\sum_{i=1}^n \frac{c_i Q_i}{N} \right) \quad (90)$$

De methode is gebaseerd op de veronderstelling dat momentane concentratie en momentaan debiet beide representatief zijn voor de periode tussen twee metingen.

Nauwkeurigheid

Het is mogelijk een schatting van het betrouwbaarheidsinterval rond de berekende vracht te berekenen. Als uitgangspunten geldt dat de berekende deelvrachten een normale verdeling volgen en onderling onafhankelijk zijn.

Het betrouwbaarheidsinterval rond een individuele vracht wordt gegeven door:

$$\left(\text{deelvracht} - t_{\left(\frac{1}{2}\alpha, N-1\right)} \sqrt{\frac{s^2}{N}} \right) \leq \text{deelvracht} \leq \left(\text{deelvracht} + t_{\left(\frac{1}{2}\alpha, N-1\right)} \sqrt{\frac{s^2}{N}} \right) \quad (91)$$

Hierin is:

s^2 de variantie
 N aantal dataparen

Als de vracht over m van dergelijke deelvrachten wordt berekend ligt de vracht tussen:

$$m \times \left(\text{deelvr.} - t_{\left(\frac{1}{2}\alpha, N-1\right)} \sqrt{\frac{s^2}{N}} \right) \leq m \times \text{deelvracht} \leq m \times \left(\text{deelvr.} + t_{\left(\frac{1}{2}\alpha, N-1\right)} \sqrt{\frac{s^2}{N}} \right) \quad (92)$$

Indien niet aan de randvoorwaarden wordt voldaan is het betrouwbaarheidsinterval onnauwkeurig. Het is helaas niet mogelijk aan te geven of het werkelijke betrouwbaarheidsinterval breder of juist minder breed is dan het berekende betrouwbaarheidsinterval.

¹⁷ Bij deze methode wordt ervan uitgegaan dat de schattingen voor de varianties exact zijn. Door het veelal geringe aantal zullen echter ook deze waarden met een zekere onnauwkeurigheid behept zijn (zie voor een betrouwbaarheidsinterval rond de variantie: § 5.3).

8.5.3.3 METHODE 3: 'GEMIDDELDE AFVOER PER INTERVAL' METHODE

Deze methode is vergelijkbaar met de 'directe' methode. Er wordt echter uitgegaan van continue debietmetingen. De vracht kan worden berekend volgens de formule:

$$Vracht = K \left(\sum_{i=1}^n c_i \bar{Q}_p \right) = \left(\sum_{i=1}^n c_i Q_p \right) \quad (93)$$

Hierin is:

$\bar{Q}_p$ de gemiddelde afvoer in de periode tussen twee metingen

Indien het debiet continu gemeten wordt, kan in plaats van het gemiddelde debiet, het totale volume (Q_p) in de berekening worden gebruikt.

In deze methode wordt de concentratie geacht representatief te zijn voor de periode tussen twee metingen met een gemiddeld debiet.

Nauwkeurigheid

De nauwkeurigheid van de methode hangt af van de mate waarin de concentratiemeting en het gemiddelde debiet representatief zijn voor respectievelijk de beschouwde periode en het totale debiet.

8.5.3.4 METHODE 4: 'GEMIDDELDE CONCENTRATIE' METHODE

Deze methode is zeer vergelijkbaar met de vorige methode. Bij de berekening van de vracht wordt in plaats van gemiddelde periodedebieten uitgegaan van het totale volume Q :

$$Vracht = K Q \sum_{i=1}^n \frac{c_i}{n} \quad (94)$$

Bij deze methode zijn concentratie en debiet niet aan elkaar gekoppeld. Indien slechts één concentratiemeting beschikbaar is wordt de methode gereduceerd tot de gemiddelde afvoer per intervalmethode, uitgaande van continue debietmetingen en een enkele periode P .

Nauwkeurigheid

De nauwkeurigheid van de vracht hangt af van de nauwkeurigheid van de debietbepaling en de nauwkeurigheid van de bepaling van de gemiddelde concentratie.

8.5.3.5 METHODE 5: 'GEWOGEN CONCENTRATIE' METHODE

Bij de gewogen concentratie methode wordt de debietgewogen concentratie vermenigvuldigd met het gemiddelde debiet:

$$Vracht = \left(\frac{\sum_{i=1}^N c_i Q_i}{\sum_{i=1}^N Q_i} \right) Q \quad (95)$$

Hierin is:

Q de totale afvoer in de periode weergeeft

Aangezien de kwaliteit afhangt van het debiet-gewogen gemiddelde is het belangrijk bij verschillende debieten de concentratie te bepalen. De metingen hoeven niet op gelijke afstanden in de tijd genomen te worden.

8.5.4 OVERIGE METHODEN

De in voorgaande paragrafen genoemde methoden zijn de meest gangbare vrachtberekenningsmethoden. In de literatuur zijn enkele andere methoden beschreven, die veelal een sterk modelmatig karakter hebben. In de vervolgparagrafen worden enkele van deze methoden besproken. Hierbij is gekozen voor een korte methodeomschrijving, mede omdat deze methoden - gezien de scope van de studie: routinematig meten - voor de waterbeheerder niet werkelijk van belang respectievelijk bruikbaar zijn.

8.5.4.1 'TRANSFER FUNCTIE' MODELLEN (METHODE 6)

Deze methode (Littlewood, 1992) houdt expliciet rekening met het verleden. Het is daardoor mogelijk rekening te houden met hysteresis-effecten. Voor de calibratie van dergelijke modellen is een grote dataset noodzakelijk.

8.5.4.2 DYNAMISCHE MODELLERING (METHODE 7)

Sokolov en Black (1996) hebben vrachten aan de hand van dynamische modellering bepaald. Met de methode kunnen in een rivier de concentraties voorspeld worden. De methode biedt de mogelijkheid om het type en de mate van hysteresis te bepalen. Bovendien is het mogelijk aan te geven welk proces (concentratie door uitspoeling of verdunning) het belangrijkste is, en of de relatie tussen debiet en concentratie lineair is. Voor de calibratie van dit type van modellen is een relatief grote dataset vereist.

8.5.4.3 'AUTOCORRELATIE' METHODE (METHODE 8)

Muskens en Hensgen (1977) hebben de ammoniumvracht in de Rijn bij Bimmen bepaald met behulp van modellering van de autocorrelatiestructuur. In hoeverre de berekende waarde (methodisch) afwijkt van de werkelijke vracht, is niet duidelijk; de beschikbare gegevens waren op dagbasis verzameld.

8.5.5 SCHATTEN VAN ONTBREKENDE GEGEVENS

Om uiteenlopende redenen kunnen concentraties en debieten, benodigd voor de berekening van (deel)vrachten ontbreken. Toepassing van vrachtberekenningsmethoden (§ 8.5.3) zal in voorkomende gevallen resulteren in vrachten die in beginsel minder nauwkeurig zijn. Door ontbrekende gegevens te schatten op basis van de wel beschikbare gegevens kan aan dit probleem in belangrijke mate worden tegemoet gekomen. Hiervoor zijn verschillende methoden beschikbaar, die in de vervolparagrafen 8.5.5.1 t/m 8.5.5.5 worden besproken.

In het algemeen geldt dat afvoergegevens de concentratiegegevens in aantal verre overtreffen, waardoor deze schattingen in de praktijk vrijwel altijd betrekking hebben op kwaliteitsgegevens.

8.5.5.1 'LINEAIRE INTERPOLATIE' METHODE

Bij deze methode worden ontbrekende concentraties berekend op basis van lineaire interpolatie tussen de dagen waarvoor wel informatie beschikbaar is. In formule:

$$c_i^{L,I} = c_{t-1} + \frac{T_i - T_{t-1}}{T_{t+1} - T_{t-1}} (c_{t+1} - c_{t-1}) \quad (96)$$

Hierin is:

<i>c</i>	concentratie
<i>T</i>	meetijdstip (bijv. kalenderdagnummer)
<i>t</i>	tijdindex van de te interpoleren concentratie
<i>t-1</i>	tijdindex van de voorafgaande concentratiemeting
<i>t+1</i>	tijdindex van de volgende concentratiemeting

Bij de interpolatie wordt geen rekening gehouden met eventuele debietafhankelijkheid van de concentratie. De methode gaat ervan uit, dat de veranderingen in concentratie lineair verlopen. Dit betekent dat de frequentie waarmee metingen worden uitgevoerd, zodanig moet zijn dat deze aanname terecht is. Tevens houdt dit in, dat piekconcentraties te allen tijde bemeten moeten worden: indien een concentratiepiek wordt gemist, wordt de vracht immers (sterk) onderschat, terwijl deze in het geval van een dal wordt overschat.

Bij lage frequenties is de methode alleen geschikt, indien de concentratie redelijk constant is en eventuele schommelingen in de concentratie langzaam (of sterk gedempt) verlopen.

8.5.5.2 'LINEAIRE REGRESSIE' METHODE

Met de 'lineaire regressie' methode wordt de concentratie als volgt berekend:

$$c_i = K (aQ_i + b) \quad (97)$$

Hierbij wordt aangenomen dat er een lineair verband bestaat tussen het debiet en de concentratie (waarbij *c* en/of *Q* eventueel getransformeerd kunnen worden).

Nauwkeurigheid van de vervolgens berekende vracht

Voor deze methode is het belangrijk, dat het verband tussen debiet en concentratie significant en betrouwbaar is. Hoe kleiner de spreiding rond de regressielijn, des de nauwkeuriger de schatting van de vracht.

Een betrouwbaarheidsinterval rond de vracht kan volgens onderstaand stappenplan bepaald worden.

Stap 1: Uitgangssituatie ¹⁸

- n het aantal metingen waarop de regressievergelijking is gebaseerd.
- N het totaal aantal debietmetingen
- b_1 de hellingsschatter van de regressievergelijking
- $\bar{x}$ het gemiddelde van n debietmetingen
- $\bar{y}$ het gemiddelde van n concentratiemetingen
- $\bar{X}$ het gemiddelde van N debietmetingen
- $\hat{\bar{Y}}$ de geschatte gemiddelde concentratie, berekend volgens:

$$\hat{\bar{Y}} = \bar{y} + b_1(\bar{X} - \bar{x}) \quad (98)$$

Stap 2: Betrouwbaarheid

De betrouwbaarheid wordt gegeven door:

$$\hat{\bar{Y}} \pm t s \sqrt{\frac{1}{n} + \frac{(\bar{X} - \bar{x})^2}{SSx}} \quad (99)$$

Hierin is:

- t de toetsingsgrootte van de student verdeling bij n-2 vrijheidsgraden en een overschrijdingskans $\frac{1}{2}\alpha$ weergeeft
- s, SSx deze grootheden worden bepaald volgens de formules beschreven in 'Lineaire regressie tussen twee meetpunten' in deel 3

Stap 3: Betrouwbaarheidsinterval

Aangezien de totale (jaar)vracht bepaald wordt als een veelvoud (k) van de gemiddelde vracht (bijv. jaarvracht = 365 x gemiddelde dagvracht), wordt het betrouwbaarheidsinterval gegeven door:

$$\left(k\hat{\bar{Y}} - t \times s \sqrt{\frac{1}{n} + \frac{(\bar{X} - \bar{x})^2}{SSx}} \right) \leq k\hat{\bar{Y}} \leq \left(k\hat{\bar{Y}} + t \times s \sqrt{\frac{1}{n} + \frac{(\bar{X} - \bar{x})^2}{SSx}} \right) \quad (100)$$

Variant regressiemodel:

Johnson (1979) paste voor de berekening van ontbrekende concentraties het volgende regressiemodel toe:

$$P = b_0 + b_1 Q + b_2 \frac{dQ}{dt}$$

¹⁸ In dit stappenplan zijn voor het debiet in plaats van de gebruikelijke coderingen Q en q, de codes X en x gebruikt. Dit is gedaan om de gebruikte formules zo veel mogelijk af te stemmen op de regressieformules, waarnaar in dit onderdeel wordt verwezen.

Hierin is:

P	de concentratie
Q	het debiet
dQ/dt	de verandering in het debiet tussen twee metingen
b_0, b_1 en b_2	parameters

De vracht wordt in dit geval gegeven door:

$$\sum P = K \sum \left(b_0 + b_1 Q + b_2 \frac{dQ}{dt} \right)$$

en de variantie door:

$$\begin{aligned} \text{Var}(\sum P) = & (K \sum Q)^2 \text{Var}(b_0) + (K \sum Q^2)^2 \text{Var}(b_1) + (K \sum Q^2)^2 \text{Var}(b_2) \\ & + (K \sum Q (dQ/dt))^2 \text{Var}(b_2) + 2(K \sum Q)(K \sum Q^2) \text{Cov}(b_0, b_1) \\ & + 2(K \sum Q)(K \sum (dQ/dt)) \text{Cov}(b_0, b_2) + 2(K \sum Q^2)(K \sum (dQ/dt)) \text{Cov}(b_1, b_2) \end{aligned}$$

Op basis van dit onderzoek wordt geconcludeerd, dat op basis van wekelijkse metingen die alle afvoervolumes vertegenwoordigen, in een rivier voldoende nauwkeurige stofvrachten bepaald kunnen worden.

8.5.5.3 'ALGEMENE EXTRAPOLATIE' METHODE

Extrapolatie-methoden maken gebruik van een wiskundig verband tussen het (hoogfrequent bemeten) debiet en een minder frequent gemeten concentratie. In zijn algemeenheid is dit verband meestal in de vorm van (Littlewood, 1992):

$$c_i = K(aQ_i + b)^{K_i} \quad (101)$$

Hierin zijn:

a, b, K_i constanten

Met de beschikbare gegevens wordt een vergelijking tussen debiet en concentratie opgesteld. Vervolgens wordt voor elke debietmeting de concentratie berekend, ook op de tijdstippen waarop de concentratie gemeten is. Indien voor K_i een waarde van 1 wordt aangenomen, dan is de methode de facto gelijk aan de lineaire regressie-methode (§ 8.5.5.2).

8.5.5.4 'ALGEMENE EXTRAPOLATIE' METHODE ZONDER CONSTATE

Bij deze door Webb et al. (1997) ontwikkelde methode is het uitgangspunt, dat er geen sprake kan zijn van een concentratie (of vracht), indien het debiet nul is¹⁹. De vracht wordt als volgt berekend:

¹⁹ Op zich is dit uitgangspunt niet verkeerd, maar door deze veldkennis in te bouwen in een model met een *an sich* betrekkelijke geringe realiteitswaarde (het is immers geen procesmodel), is deze aanpassing feitelijk misplaatst (zie hierna).

$$c_i = K(aQ_i)^{K_i} \quad (102)$$

Een lineair verband tussen debiet en concentratie zal in de meeste gevallen slechts een grove benadering zijn van de werkelijkheid. Immers, de lineaire relatie doet geen uitspraken over de relevante processen, laat staan over de processen die buiten de gemeten debietrange een rol spelen respectievelijk optreden. Naast voornoemde (procesmatige) bezwaren is de regressietheorie zelf minder betrouwbaar, indien de constante uit de vergelijking wordt weggelaten.

8.5.5.5 'ALGEMENE EXTRAPOLATIE' METHODE ZONDER CONSTATE, MET CORRECTIE

Bij deze methode wordt de uitkomst van de voorgaande methode gecorrigeerd door de uitkomst te vermenigvuldigen met een correctiefactor (CF). CF wordt als volgt berekend:

$$CF = \exp(2.651 s^2) \quad (103)$$

Hierin is:

s de standaardafwijking van de schatting van de responscurve in $\log_{10}$

Deze correctie wordt toegepast om een schatting zonder systematische fout te verkrijgen (Webb et al., 1997).

8.6 EXTRAPOLATIE VAN RESULTATEN NAAR ANDERE GEBIEDEN

Richards (1989) heeft enkele mogelijkheden onderzocht om de vrachten van niet-gemonitorde gebieden in te kunnen schatten op basis van de resultaten van gebieden waar wel is gemeten. Daarbij zijn niet-gemonitorde gebieden onderverdeeld in gebieden die benedenstrooms van meetpunten zijn gelegen en complete stroomgebieden.

De belangrijkste conclusie die wordt getrokken, is dat de debiet-ratio methode (niet beschreven in § 8.5) in het studiegebied nog de 'minst slechte' resultaten opleverde. Op basis van het debiet en de berekende vracht van een gemonitord gebied enerzijds, en het debiet van een gebied waar de kwaliteit niet is onderzocht anderzijds, wordt de vracht van het laatste gebied naar rato van het debiet geschat. Indien puntbronnen in de 'onbekende' gebieden aanwezig zijn, dient hiervoor te worden gecorrigeerd.

Voor aanvullende informatie over deze methode, wordt verwezen naar voornoemde literatuur.

In hoeverre deze methode ook in andere dan de onderzochte gebieden (waaronder Nederland) bruikbare resultaten zou kunnen opleveren, is onbekend. De uitkomsten van dit onderzoek zouden interessant kunnen zijn voor die regio's waar afwateringsgebieden weliswaar klein zijn, maar onderling grote overeenkomsten vertonen. Een nader onderzoek naar de gebruiksmogelijkheden van de methode door waterbeheerders in Nederland zou hierover meer duidelijkheid kunnen verschaffen.

8.7 CASES

8.7.1 VRIJ AFSTROMEND: VRACHTEN IN DE MOSBEEK

Doelstelling van de case

1. Beoordelen van de beschrijvingen.
2. Aantonen dat er duidelijke verschillen tussen de uitkomsten zijn.
3. Aantonen dat de kwaliteit van de vrachtberekening afhangt van het aantal metingen.

Beschikbare data

Meetgegevens 1995 van een meetpunt in de Mosbeek (klein beekstelsysteem met hoge natuurwaarden in een hellend agrarisch gebied).

Meetfrequenties

Debiet: continu (gemiddelden over 20 minuten).

Totaalfosfaat en chloride: debietproportionele mengmonsters per week in tijden van normale afvoer. Debietproportionele mengmonsters voor kortere perioden in tijden van piekafvoer. Twee-wekelijkse steekbemonstering.

Zwevende stof: twee-wekelijkse steekbemonstering.

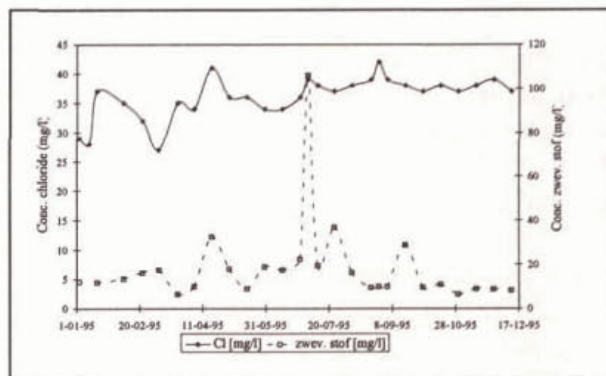
De 'werkelijke' vracht

Onder de 'werkelijke' vracht wordt de best mogelijke schatting verstaan. Deze vracht is voor totaalfosfaat en chloride berekend op basis van de volledige dataset en met behulp van formule (84). De werkelijke vracht bedroeg in de meetperiode 379 kg fosfaat en 35648 kg chloride.

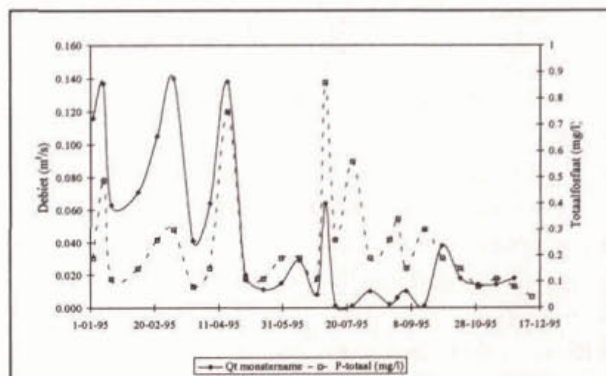
Data-analyse

Een eerste stap in de data-analyse bestond eruit te beoordelen of de kwaliteitssteekmonsters vergeleken moeten worden met daggemiddelde debieten of met de momentane debieten. Uit de analyse van de data bleek dat de varianties in het debiet over een dag soms groot zijn, waardoor niet met daggemiddelde debieten gerekend kan worden.

In Figuur 8-2 en Figuur 8-3 zijn de data uitgezet van de twee-wekelijkse bemonsteringen. Opvallend zijn de hoge debieten in het voorjaar. Een seizoensinvloed op het debiet werd verwacht. Op basis van de visuele inspectie lijkt in de concentraties chloride, zwevend stof en totaalfosfaat geen seizoensinvloed aanwezig te zijn.



Figuur 8-2: Chloride- en zwevendstofconcentraties Mosbeek



Figuur 8-3: Debiet en totaalfosfaatconcentraties Mosbeek

In Figuur 8-4 is de chlorideconcentratie en de totaalfosfaatconcentratie uitgezet tegen de concentratie zwevend stof. Uit de figuur komt naar voren dat er sprake is van een verband tussen de fosfaatconcentratie en de zwevend stofconcentratie. Er is geen verband tussen de chloride en de zwevend stofconcentratie.

Er blijkt wel een verband te bestaan tussen chloride en debiet (Figuur 8-5). Bij toenemend debiet lijkt de chlorideconcentratie te dalen. Uitgaande van de uitgezette reeksen (Figuur 8-2 en Figuur 8-3) is dit verband vermoedelijk niet causaal: er is een lichte, vrij constante stijging in de chlorideconcentratie gedurende het jaar opgetreden, terwijl een vrij abrupte daling in de afvoer is geconstateerd.

Ook al verwacht men bij verhoogde afvoer een toenemend gehalte zwevend stof, nochtans is een dergelijke relatie niet duidelijk aanwezig. Ook de fosfaatconcentratie vertoont geen duidelijke relatie met het debiet.

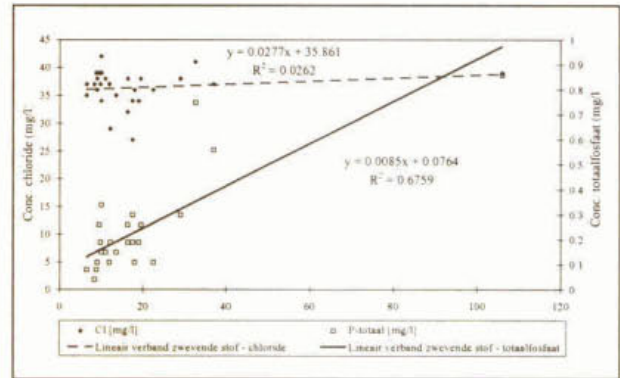
Op basis van de steekbemonsteringen lijkt een methode die gebruik maakt van een verband tussen concentratie en debiet, niet geschikt. Het is niet overtuigend aangetoond dat een dergelijke relatie bestaat.

Resultaten vrachtberekeningen

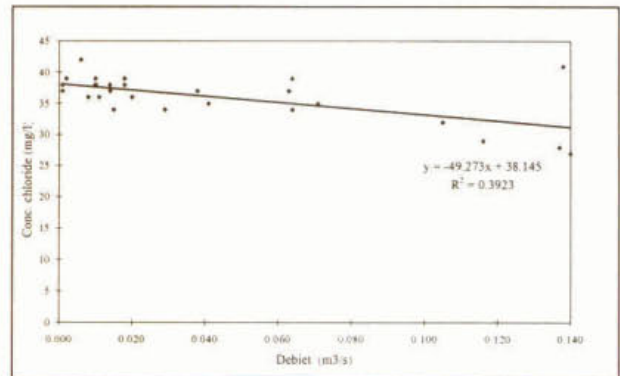
In Tabel 8-2 is het percentage gerelateerd aan de geschatte vracht, die per definitie 100% is. Een positieve waarde in de tabel betekent dat de werkelijke vracht groter is dan de geschatte vracht.

Uit deze tabel blijkt eveneens dat een onderschatting van de werkelijke fosfaatvracht voor alle methoden optreedt. Bij de 'recht-toe-recht-aan' methode is de werkelijke vracht 62% hoger dan de berekende vracht. Bij gebruik van de '(debietgewogen)concentratie' methode wordt de vracht redelijk benaderd. Aangezien er echter geen relatie tussen debiet en concentratie is gevonden ontbreekt de basis voor deze methode.

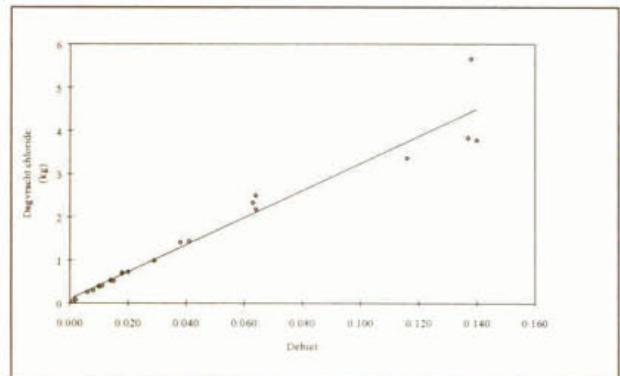
De chloridevracht wordt door alle methoden redelijk benaderd. Gezien de zeer geringe variantie in de chlorideconcentratie was dit te verwachten.



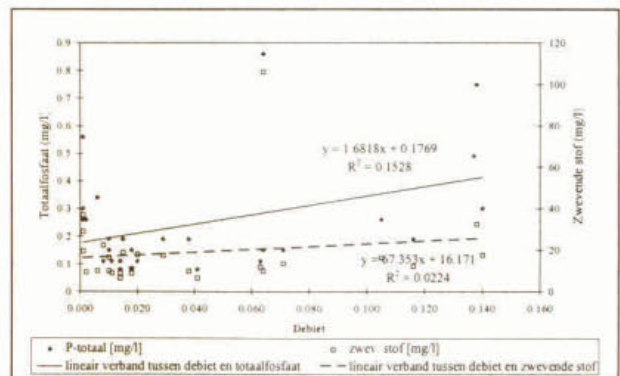
Figuur 8-4: Verband chloride en totaalfosfaat met zwevend stof



Figuur 8-5: Verband tussen de chlorideconcentratie en het debiet



Figuur 8-6: Relatie totaalfosfaat en zwevend stof met debiet



Figuur 8-7: Verband tussen de chloridevracht en het debiet

Tabel 8-2: Resultaten op basis van daggemiddelde debieten en alle kwaliteitssteekmonsters

Methode	totaalfosfaat		chloride	
'Recht-toe-recht-aan' methode	234	62%	33601	6%
'Directe' methode	317	20%	31692	12%
'Gemiddelde afvoer per interval' methode	240	58%	38237	-7%
'Gemiddelde concentratie' methode	275	38%	40089	-11%
'Gewogen concentratie' methode	361	5%	37934	-6%

Tabel 8-3: Resultaten op basis van momentane debieten en alle kwaliteitssteekmonsters

Methode	totaalfosfaat		chloride	
'Recht-toe-recht-aan' methode	270	40%	38746	-8%
'Directe' methode	375	1%	37443	-5%
'Gemiddelde afvoer per interval' methode	232	63%	38388	-7%
'Gemiddelde concentratie' methode	316	20%	46046	-23%
'Gewogen concentratie' methode	429	-12%	43034	-17%

Het gebruik van de momentane debieten heeft voor fosfaat per saldo een positief effect. Alleen de 'gewogen concentratie' methode, die gebruik maakt van een verband tussen concentratie en debiet, levert een relatief slecht resultaat op.

Voor chloride geldt, dat de vracht op basis van daggemiddelde debieten de werkelijkheid beter benadert.

Voor beide variabelen benadert de 'directe' methode de werkelijke vracht het best.

Effect van afnemende meetfrequenties

In Tabel 8-4 is voor verschillende meetfrequenties de afwijking van de berekende waarde ten opzichte van de werkelijke waarde weergegeven.

Door het constante verloop van de chlorideconcentratie is het mogelijk de meetfrequentie te verlagen, zonder dat de nauwkeurigheid van de vrachtbepaling achteruit gaat. Voor fosfaat gaat dit niet op. Opvallend is dat de vrachtberekeningen bij 6 metingen per jaar beter zijn dan bij 12 metingen per jaar. Dit bevestigt het gegeven dat de bepaling van de vracht zeer sterk afhangt van de toevalligheid van de monsternamen: de gegevens die niet in de analyse op basis van 6 data zijn meegenomen, hebben een negatieve invloed bij de berekeningen bij 12 metingen.

Tabel 8-4: Effect van afnemende meetfrequenties

Methode	meetfrequentie	totaalfosfaat				chloride			
		4	6	12	25	4	6	12	25
'Recht-toe-recht-aan' methode		124%	50%	91%	40%	-5%	-26%	-15%	-8%
'Directe' methode		114%	20%	64%	1%	4%	-16%	-10%	-5%
'Gemiddelde afvoer per interval' methode		173%	61%	70%	58%	-12%	-1%	-1%	-7%
'Gemiddelde concentratie' methode		86%	64%	79%	20%	-21%	-19%	-21%	-23%
'Gewogen concentratie' methode		78%	31%	53%	-12%	-10%	-5%	-13%	-17%

Conclusies en aanbevelingen:

- Met de gemiddelde afvoer per interval methode wordt de werkelijke chloridevracht goed geschat. Andere methoden leveren redelijk resultaten.
- De meetfrequentie van chloride voor de bepaling van de chloridevracht kan omlaag.
- De fosfaatvracht kan niet goed bepaald worden. De directe methode bij 25 steekmonsters per jaar levert een goed resultaat, gegeven de overige uitkomsten berust dit echter vermoedelijk op toeval.
- Aanvullend onderzoek kan uitgevoerd worden om aan te geven wat de spreiding is in de vracht gebaseerd op minder dan 25 metingen. Er zijn veel verschillende combinaties van 4, 6 of 12 metingen uitvoerbaar op basis van 25 metingen.
- Aanvullend onderzoek naar het effect van het schatten van concentratie voor elk willekeurig tijdstip op basis van de methoden gepresenteerd in hoofdstuk 8.5.5.

8.7.2 TOEPASSINGEN VAN VERSCHILLENDE (AANGEPASTE) BEREKENINGSMETHODEN IN HET GEVAL VAN BEMALINGSUREN - MEETGEBIED VIERHUIS, FRIESLAND

Beschikbare gegevens

Waterschap Friesland heeft de berekeningsmethoden toegepast op een meetreeks van debietproportionele concentratiemetingen van totaalstikstof en totaalfosfaat, genomen bij het gemaal Vierhuis, Friesland. De beschikbare gegevens waren:

- wekelijkse mengmonsters voor concentratiemetingen, proportioneel aan het aantal draaiuren;
- dagelijkse debietmetingen, gebaseerd op basis van peilstanden;
- aantal draaiuren per dag.

Conclusies en aanbevelingen:

1. De uitkomsten van verschillende berekeningsmethoden (Tabel 8-5) laten zien dat de grootte van de berekende vrachten sterk afhangt van de methode.
2. In de onderhavige *case* hangen de verschillen behalve van de berekeningsmethode ook af van de koppeling tussen potentiële debieten en draaiuren. Indien het potentiële debiet niet varieert (er zijn geen peilverschillen) maakt het niet uit op welk moment debieten en draaiuren worden gecombineerd. Indien peilverschillen bestaan is het altijd aan te bevelen draaiuren en potentiële debieten zo spoedig mogelijk te combineren tot werkelijke debieten. Indien potentiële dagdebieten en draaiuren per dag beschikbaar zijn worden de nauwkeurigste resultaten verkregen door deze waarden direct tot werkelijke dagdebieten te combineren. Aanvullend onderzoek kan uitgevoerd worden naar het effect van de verschillende momenten waarop draaiuren en potentiële debieten worden gekoppeld. Afhankelijk van de variabiliteit in de potentiële debieten zal de afwijking groter worden naarmate voor het debiet gebruik gemaakt wordt van een uur-, dag-, week-, maand- of jaargemiddeld potentieel debiet.
3. In het onderhavige geval is de spreiding in de kwaliteitsmetingen kleiner dan in de werkelijkheid, aangezien gebruik gemaakt is van mengmonsters. Op het moment dat gebruik gemaakt is van concentraties op dagbasis (de concentratie is representatief voor de mengperiode) wordt hierdoor de vrachtbepaling nauwkeuriger dan op basis van werkelijk gemeten concentraties mag worden verwacht.
4. De toegepaste berekeningsmethoden vormen een combinatie van variaties op vrachtberekeningsmethoden en berekeningen op basis van draaiuren, zoals deze zijn beschreven in deze rapportage.

5. In het kader van een stageopdracht is, op basis van het voor de case gebruikte basismateriaal, onderzoek gedaan naar meetfrequenties door Sollie (1996). Voor meer informatie en de resultaten wordt naar de betreffende rapportage verwezen.

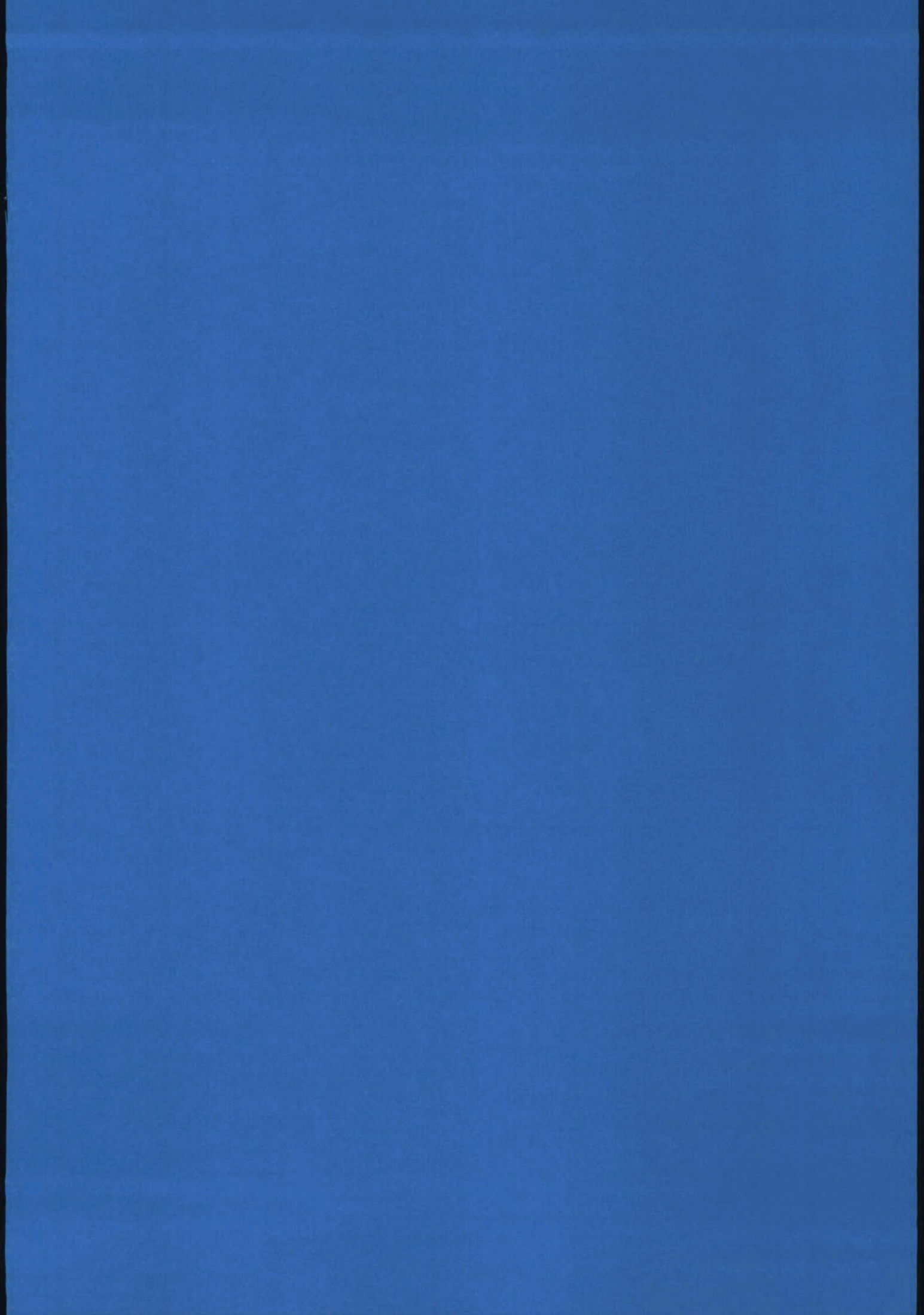
Tabel 8-5: Resultaten berekeningsmethoden vrachten meetgebied Vierhuis, Friesland

Methode	totaalfosfaat (kg/j) %		totaal-stikstof (kg/j) %	
<u>Beste benadering:</u>				
$V = \sum_{i=1}^{365} Q_i d_{\min,i} c_i$	2560		48496	
<u>Aanpassing recht-toe-recht-aan:</u>				
$V = \sum_{i=1}^{365} \frac{Q_i}{365} \sum_{i=1}^{365} \frac{c_i}{365} \sum_{i=1}^{365} d_i$	2279	12	37194	30
<u>Aangepaste directe methode:</u>				
$V = \sum_{i=1}^{365} d_{\min,i} \sum_{j=1}^{41} \frac{Q_j c_j}{41}$	2213	16	36817	32
<u>Gemiddelde concentratie methode:</u>				
$V = 365 \sum_{j=1}^{41} \frac{c_j}{41} \sum_{i=1}^{365} \frac{Q_i d_{\min,i}}{365}$	2713	-6	44277	10
<u>Aangepaste debietgewogen concentratie methode:</u>				
$V = \sum_{i=1}^{365} d_{\min,i} \left[\sum_{i=1}^{365} Q_i c_i / \sum_{i=1}^{365} Q_i \right]$	2152	19	37330	30
<u>Nieuw alternatief A:</u>				
$V = \sum_{j=1}^{41} \left[c_j Q_j \sum_{n=1}^{p_j} d_{\min,i} \right]$	2407	6	44659	9
<u>Nieuw alternatief B:</u>				
$V = \sum_{j=1}^{41} \left[c_j \sum_{i=1}^p d_{\min,i} \sum_{i=1}^p \frac{Q_i}{p} \right]$	2156	19	37931	28

Percentages zijn afwijking van de werkelijkheid ten opzichte van de berekende grootheid.

Notaties:

i	index voor individuele dagen.
j	index voor de dagen dat een mengmonster is opgehaald.
p _j	aantal dagen waarover het mengmonster is genomen.
Q _i	In de onderstaande formules is Q _i het op basis van peilstanden berekende potentiële debiet. Dit debiet heeft de volgende relatie met het werkelijke debiet: indien het gemaal pompt is het vermogen van de pomp constant. Bij gelijk vermogen hangt het debiet af van het peilverschil: het kost meer vermogen om hetzelfde volume over een groter peilverschil te pompen. Een debiet kan berekend worden op het moment dat er peilverschillen zijn, ook als het gemaal niet draait. Vandaar dat Q _i in deze tekst het potentiële debiet wordt genoemd: het debiet dat potentieel verpompt kan worden indien de pompen aanstaan.
d _{min,i}	het aantal draaiuren op dag i.
d _{min,j}	het aantal draaiuren op dag j, waarop een mengmonster is opgehaald.
c _i	In de onderstaande formule is c _i de draaiuur-gewogen concentratie. Op het moment dat de berekeningen op dagbasis zijn uitgevoerd is ervan uitgegaan dat de gemeten concentratie geldig is voor iedere individuele dag, tussen twee metingen. Dit houdt impliciet in dat de concentratie geen variaties in de week kent en draaiuur-gewogen meten feitelijk niet noodzakelijk is; de concentratie is constant.
V	vracht in 1996.



LITERATUUR

- Baggelaar, P.K. en D.H. Baggelaar, 1995, Trends in de Oppervlaktewaterkwaliteit in Rijn en Maas, RIWA, 124 p.
- Baggelaar, P.K. en C.G.E.M. van Beek, 1995, Suggesties voor Optimalisatie van Grootschalige Meetnetten Grondwaterkwaliteit, Kiwa, Nieuwegein, nr. KOA 95.17, 24 p.
- Bayley, G.V. en J.M. Hammersley, 1946, The 'Effective' Number of Independent Observations in an Auto-correlated Time Series, Journal of the Royal Statistician Society, vol. 8, no. 1B, pp. 184-197.
- Blind, M.W. en R.H. Aalderink, 1995, Watqual: A Program for Water Quality Time Series Analysis with Respect to Optimization Of Trend Monitoring Frequency, Stichting Onderzoek Waterkwaliteitsbeheer/Landbouwuniversiteit Wageningen, rapport M266, Vakgroep Waterkwaliteitsbeheer en Aquatische Oecologie, LU Wageningen, 27 p.
- Blind, M.W. en R.H. Aalderink, 1995a, Zuiveringsschap Rivierenland: Analyse en Optimalisatie van het Routinematig Meetnet - Ontwikkelingen Waterkwaliteit 1985 t/m 1994, Stichting Onderzoek Waterkwaliteitsbeheer/Landbouwuniversiteit Wageningen, 108 p. en bijlagen.
- Blind, M.W. en R.H. Aalderink, 1995b, Analyse en Optimalisatie van het Routinematig Meetnet van Waterschap Friesland, Stichting Onderzoek Waterkwaliteitsbeheer/Landbouwuniversiteit Wageningen.
- Chatfield, C., The Analysis of Time Series - An Introduction, fourth edition, Chapman and Hall, New York, 1989, 241 p.
- Cochran, W.G., 1953, Sampling Techniques, John Wiley & Sons, New York, 330 p.
- Cofino, W.P., 1994, Quality Management of Monitoring Programmes, Proceedings Monitoring Tailor-Made, 20-23 Sept 1993. Adriaanse et al. ed., pp. 178-187.
- Gilbert, R.O. 1987, Statistical Methods for Environmental Pollution Monitoring, van Nostrand Reinhold Company, New York, 1987, 320 p.
- Hellmann, H., 1986, Zum Problem der Frachtberechnung in FließGewässern, Zeitschrift für Wasser- und Abwasser-Forschung, 19, pp. 133-139.
- Helsel, D.R. en R.M. Hirsch, 1992, Statistical Methods in Water Resources, Studies in Environmental Science 49, Elsevier, Amsterdam - London - New York -, Tokyo 1992.
- Hetling, L.J. et al., Estimation of the Optimal Sampling Interval in Assessing Water Quality of Streams, Environmental Modeling and Simulation, EPA 600/9-76-016, Environmental Protection Agency, Washington D.C.
- Hirsch, R.M. en J.R. Slack, 1984, A Nonparametric Trend Test for Seasonal Data with Serial Dependence, Water Resources Research, vol. 20, no. 6, pp. 727-732.
- Hollander, M. en D.A. Wolfe, 1973, Nonparametric Statistical Methods, Wiley, New York.
- Johnson, A.H., 1979, Estimating Solute Transport in Streams from Grab Samples, Resour. Res.15, pp. 1224-1228.

- Jousma, G., J.P.C. Gehrels, M.P. Laeven en J.G.F. van Dael, 1998, Evaluatie van Provinciale Grondwatermeetnetten - Methodiek en Voorbeelden, NITG-TNO, KIWA NV in opdracht van STOWA, rapportnr. 97-256B, 129 p. en bijlagen.
- Kaarsemaker, L. en A. van Wijngaarden, 1953, Tables for Use in Rank Correlation, Statistica Neerlandica 7, pp. 41-54.
- Klavers, H. en A. de Vries 1993, Vrachtberekenningsmethoden - Een Casestudy voor Maas en Rijn, DGW/Riza Werkdocument nr. GWWS-93.111X/RIZA-93.021X.
- Laane, R.W.P.M. et al., 1990, Monitoring the Progress of Attempts to Reduce Nutrient Load and Inputs of Certain Compounds in the North Sea by 50%, Environmental Management, 14(2), pp. 221-227.
- LaValle, I.H., An Introduction to Probability Decision and Inference, International Series in Decision Processes, Holt, Rinehart and Winston, Inc., New York, 1970, 767 p.
- Lettenmaier, D.P., 1976, Detection of Trends in Water Quality Data from Records with Dependent Observations, Water Resources Research, vol. 12 no. 5., pp. 1037-1046.
- Littlewood, I.G., 1992, Estimating Contaminant Loads in Rivers: A Review, Institute of hydrology, Oxfordshire, report no.117.
- Marsh, T.J., Towards a Nitrate Balance for England and Wales, Water Services, 84, No. 1016, pp. 601-606.
- Montgomery, D.C. en E.A. Peck, 1982, Introduction to Linear Regression Analysis, John Wiley & Sons, 504 p.
- Muskens, P.J.W.M. en W.G.J. Hensgens, 1977, Time Series Analysis on Ammonia Concentration and Load Values of the River Rhine, Water Research, Vol. 11, pp. 509-515.
- OSPARCOM (Oslo and Paris Commission), 1992, Principles of the Comprehensive Study of Riverine Inputs, Oslo and Paris Commissions, New Court, 48 Carey Street, London WC2A 2JQ.
- Phillips, R.D., 1988, WQStat II, User's Manual (Rough Draft), Colorado State University.
- Reinelt, L.E. en A. Grimvall, 1992, Estimation of Nonpoint Source Loadings with Data Obtained from Limited Sampling Programs, Environmental-Monitoring-and-Assessment, 21: 3, pp. 173-192.
- Richards, R.P., 1989, Evaluation of some Approaches to Estimating Non-Point Pollutant Loads for Unmonitored Areas, Water Resources Bulletin, vol. 25, no. 4, pp. 891-904.
- Rosner, B., 1983, Percentage Points for a Generalized ESD Many-outlier Procedure, Technometrics 25: pp. 165-172.
- Semmekrot, S. en R.A.E. Knoben, in voorber., Project Inventarisatie Meetstrategieën en -inrichting, RIZA-rapport.
- Shapiro, S.S. en M.B. Wilk, 1965, An Analysis of Variance Test for Normality (Complete Samples), Biometrika 52: pp. 591-611.
- Snedecor, G.W. en W.G. Cochran, 1967, Statistical Methods, Sixth Edition, The Iowa State University Press, Ames, Iowa, U.S.A., 593 p.
- Sokolov, S. en K.P. Black, 1996, Modelling the Time Evolution of Water Quality Parameters in a River: Yarra River, Australia, Journal of Hydrology, 178, pp. 311-335.

- Sollie, P., 1996, Meten en Balansen - Een Onderzoek naar Nauwkeurigheid van Bemonsteringen, Neerslagkwaliteit in Friesland en Balansen in Meetgebied Vierhuis, Rijkshogeschool IJsselland in samenwerking met Waterschap Friesland, 60 p. + bijlagen.
- STOWA, 1994, Handboek debietmeten in open waterlopen, rapportnr. 94-13, 157 p.
- Treunert, E. et al., 1974, Effect of Sampling Frequency on Determination of the Annual Phosphorus Load of Average Streams, Hydrochemical Hydraulic Geological Mitteilungen, vol. 1, pp. 175-198.
- UN/ECE Task Force on Monitoring & Assessment, 1994, Guidelines on Water-Quality Monitoring and Assessment of Transboundary Rivers, Working programme 1994/1995, RIZA-report nr 96.034, 1996, 50 p.
- Ward, R.C., J.C. Loftis en G.B. McBride, 1990, Design of Water Quality Monitoring Systems, Van Nostrand Reinhold, New York.
- Walling, D.E. en B.W. Webb, 1981, The Reliability of Suspended Load Data. In: Erosion and Sediment Measurement, IAHS publ. no. 133, pp. 177-194.
- Webb, B.W., J.M. Phillips, D.E. Walling, I.G. Littlewood, C.D. Watts en G.J.L.L. Leeks, 1997, Load Estimation Methodologies for British Rivers and their Relevance to the LOIS RACS(R) Programme, The Science of the Total Environment, 194/195, pp. 379-389.
- Whitfield, P.H., 1982, Selecting a Method for Estimating Substance Loadings, Water Resources Bulletin, vol.18, pp. 203-210.
- Whitfield, P.H., 1988, Goals and Data Collection Designs for Water Quality Monitoring, Water Resources Bulletin, vol. 24, no. 4, pp. 775-780.
- Yaksich, S.M. en F.H. Verhoff, 1983, Sampling Strategy for River Pollutant Transport, J. Environm. Eng. 109 (1), pp. 219-231.
- Yu, Y.S. en S.M. Zou, 1993, Relating Trends of Principal Components to Trends of Water Quality Constituents, Water Resources Bulletin, vol. 29, no. 5, pp. 797-806.

BIJLAGE 1: RECHTER OVERSCHRIJDINGSKANSEN **VAN DE STANDAARD NORMALE VERDE-** **LING**

z	0.00	0.01	0.02	0.003	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.5000	0.4960	0.4920	0.4988	0.4840	0.4801	0.4761	0.4721	0.4681	0.4641
0.1	0.4602	0.4562	0.4522	0.4590	0.4443	0.4404	0.4364	0.4325	0.4286	0.4247
0.2	0.4207	0.4168	0.4129	0.4196	0.4052	0.4013	0.3974	0.3936	0.3897	0.3859
0.3	0.3821	0.3783	0.3745	0.3809	0.3669	0.3632	0.3594	0.3557	0.3520	0.3483
0.4	0.3446	0.3409	0.3372	0.3435	0.3300	0.3264	0.3228	0.3192	0.3156	0.3121
0.5	0.3085	0.3050	0.3015	0.3075	0.2946	0.2912	0.2877	0.2843	0.2810	0.2776
0.6	0.2743	0.2709	0.2676	0.2733	0.2611	0.2578	0.2546	0.2514	0.2483	0.2451
0.7	0.2420	0.2389	0.2358	0.2410	0.2296	0.2266	0.2236	0.2206	0.2177	0.2148
0.8	0.2119	0.2090	0.2061	0.2110	0.2005	0.1977	0.1949	0.1922	0.1894	0.1867
0.9	0.1841	0.1814	0.1788	0.1833	0.1736	0.1711	0.1685	0.1660	0.1635	0.1611
1.0	0.1587	0.1562	0.1539	0.1579	0.1492	0.1469	0.1446	0.1423	0.1401	0.1379
1.1	0.1357	0.1335	0.1314	0.1350	0.1271	0.1251	0.1230	0.1210	0.1190	0.1170
1.2	0.1151	0.1131	0.1112	0.1145	0.1075	0.1056	0.1038	0.1020	0.1003	0.0985
1.3	0.0968	0.0951	0.0934	0.0963	0.0901	0.0885	0.0869	0.0853	0.0838	0.0823
1.4	0.0808	0.0793	0.0778	0.0803	0.0749	0.0735	0.0721	0.0708	0.0694	0.0681
1.5	0.0668	0.0655	0.0643	0.0664	0.0618	0.0606	0.0594	0.0582	0.0571	0.0559
1.6	0.0548	0.0537	0.0526	0.0545	0.0505	0.0495	0.0485	0.0475	0.0465	0.0455
1.7	0.0446	0.0436	0.0427	0.0443	0.0409	0.0401	0.0392	0.0384	0.0375	0.0367
1.8	0.0359	0.0351	0.0344	0.0357	0.0329	0.0322	0.0314	0.0307	0.0301	0.0294
1.9	0.0287	0.0281	0.0274	0.0285	0.0262	0.0256	0.0250	0.0244	0.0239	0.0233
2.0	0.0228	0.0222	0.0217	0.0226	0.0207	0.0202	0.0197	0.0192	0.0188	0.0183
2.1	0.0179	0.0174	0.0170	0.0177	0.0162	0.0158	0.0154	0.0150	0.0146	0.0143
2.2	0.0139	0.0136	0.0132	0.0138	0.0125	0.0122	0.0119	0.0116	0.0113	0.0110
2.3	0.0107	0.0104	0.0102	0.0106	0.0096	0.0094	0.0091	0.0089	0.0087	0.0084
2.4	0.0082	0.0080	0.0078	0.0081	0.0073	0.0071	0.0069	0.0068	0.0066	0.0064
2.5	0.0062	0.0060	0.0059	0.0062	0.0055	0.0054	0.0052	0.0051	0.0049	0.0048
2.6	0.0047	0.0045	0.0044	0.0046	0.0041	0.0040	0.0039	0.0038	0.0037	0.0036
2.7	0.0035	0.0034	0.0033	0.0034	0.0031	0.0030	0.0029	0.0028	0.0027	0.0026
2.8	0.0026	0.0025	0.0024	0.0025	0.0023	0.0022	0.0021	0.0021	0.0020	0.0019
2.9	0.0019	0.0018	0.0018	0.0018	0.0016	0.0016	0.0015	0.0015	0.0014	0.0014
3.0	0.0013	0.0013	0.0013	0.0013	0.0012	0.0011	0.0011	0.0011	0.0010	0.0010
3.1	0.0010	0.0009	0.0009	0.0010	0.0008	0.0008	0.0008	0.0008	0.0007	0.0007
3.2	0.0007	0.0007	0.0006	0.0007	0.0006	0.0006	0.0006	0.0005	0.0005	0.0005
3.3	0.0005	0.0005	0.0005	0.0005	0.0004	0.0004	0.0004	0.0004	0.0004	0.0003
3.4	0.0003	0.0003	0.0003	0.0003	0.0003	0.0003	0.0003	0.0003	0.0003	0.0002
3.5	0.0002	0.0002	0.0002	0.0002	0.0002	0.0002	0.0002	0.0002	0.0002	0.0002
3.6	0.0002	0.0002	0.0001	0.0002	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001
3.7	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001
3.8	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001
3.9	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
4.0	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000

BIJLAGE 2: OVERSCHRIJDINGSKANSEN VAN DE STUDENTS T-VERDELING

df	Onbetrouwbaarheidsniveau α				df	Onbetrouwbaarheidsniveau α			
	0.1	0.05	0.025	0.001		0.1	0.05	0.025	0.001
1	6.3137	12.7062	25.4519	636.5776	61	1.6702	1.9996	2.2981	3.4572
2	2.9200	4.3027	6.2054	31.5998	62	1.6698	1.9990	2.2971	3.4545
3	2.3534	3.1824	4.1765	12.9244	63	1.6694	1.9983	2.2962	3.4517
4	2.1318	2.7765	3.4954	8.6101	64	1.6690	1.9977	2.2954	3.4491
5	2.0150	2.5706	3.1634	6.8685	65	1.6686	1.9971	2.2945	3.4466
6	1.9432	2.4469	2.9687	5.9587	66	1.6683	1.9966	2.2937	3.4441
7	1.8946	2.3646	2.8412	5.4081	67	1.6679	1.9960	2.2929	3.4418
8	1.8595	2.3060	2.7515	5.0414	68	1.6676	1.9955	2.2921	3.4395
9	1.8331	2.2622	2.6850	4.7809	69	1.6672	1.9949	2.2914	3.4372
10	1.8125	2.2281	2.6338	4.5868	70	1.6669	1.9944	2.2906	3.4350
11	1.7959	2.2010	2.5931	4.4369	71	1.6666	1.9939	2.2899	3.4329
12	1.7823	2.1788	2.5600	4.3178	72	1.6663	1.9935	2.2892	3.4308
13	1.7709	2.1604	2.5326	4.2209	73	1.6660	1.9930	2.2886	3.4289
14	1.7613	2.1448	2.5096	4.1403	74	1.6657	1.9925	2.2879	3.4270
15	1.7531	2.1315	2.4899	4.0728	75	1.6654	1.9921	2.2873	3.4249
16	1.7459	2.1199	2.4729	4.0149	76	1.6652	1.9917	2.2867	3.4232
17	1.7396	2.1098	2.4581	3.9651	77	1.6649	1.9913	2.2861	3.4214
18	1.7341	2.1009	2.4450	3.9217	78	1.6646	1.9908	2.2855	3.4197
19	1.7291	2.0930	2.4334	3.8833	79	1.6644	1.9905	2.2849	3.4180
20	1.7247	2.0860	2.4231	3.8496	80	1.6641	1.9901	2.2844	3.4164
21	1.7207	2.0796	2.4138	3.8193	81	1.6639	1.9897	2.2838	3.4148
22	1.7171	2.0739	2.4055	3.7922	82	1.6636	1.9893	2.2833	3.4132
23	1.7139	2.0687	2.3979	3.7676	83	1.6634	1.9890	2.2828	3.4116
24	1.7109	2.0639	2.3910	3.7454	84	1.6632	1.9886	2.2823	3.4101
25	1.7081	2.0595	2.3846	3.7251	85	1.6630	1.9883	2.2818	3.4086
26	1.7056	2.0555	2.3788	3.7067	86	1.6628	1.9879	2.2813	3.4073
27	1.7033	2.0518	2.3734	3.6895	87	1.6626	1.9876	2.2809	3.4059
28	1.7011	2.0484	2.3685	3.6739	88	1.6624	1.9873	2.2804	3.4046
29	1.6991	2.0452	2.3638	3.6595	89	1.6622	1.9870	2.2800	3.4033
30	1.6973	2.0423	2.3596	3.6460	90	1.6620	1.9867	2.2795	3.4019
31	1.6955	2.0395	2.3556	3.6335	91	1.6618	1.9864	2.2791	3.4006
32	1.6939	2.0369	2.3518	3.6218	92	1.6616	1.9861	2.2787	3.3995
33	1.6924	2.0345	2.3483	3.6109	93	1.6614	1.9858	2.2783	3.3982
34	1.6909	2.0322	2.3451	3.6007	94	1.6612	1.9855	2.2779	3.3970
35	1.6896	2.0301	2.3420	3.5911	95	1.6611	1.9852	2.2775	3.3958
36	1.6883	2.0281	2.3391	3.5821	96	1.6609	1.9850	2.2771	3.3948
37	1.6871	2.0262	2.3363	3.5737	97	1.6607	1.9847	2.2767	3.3937
38	1.6860	2.0244	2.3337	3.5657	98	1.6606	1.9845	2.2764	3.3926
39	1.6849	2.0227	2.3313	3.5581	99	1.6604	1.9842	2.2760	3.3915

(continued)

df	Onbetrouwbaarheidsniveau α				df	Onbetrouwbaarheidsniveau α			
	0.1	0.05	0.025	0.001		0.1	0.05	0.025	0.001
40	1.6839	2.0211	2.3289	3.5510	100	1.6602	1.9840	2.2757	3.3905
41	1.6829	2.0195	2.3267	3.5443	101	1.6601	1.9837	2.2753	3.3894
42	1.6820	2.0181	2.3246	3.5377	102	1.6599	1.9835	2.2750	3.3886
43	1.6811	2.0167	2.3226	3.5316	103	1.6598	1.9833	2.2746	3.3875
44	1.6802	2.0154	2.3207	3.5258	104	1.6596	1.9830	2.2743	3.3865
45	1.6794	2.0141	2.3189	3.5203	105	1.6595	1.9828	2.2740	3.3856
46	1.6787	2.0129	2.3172	3.5149	106	1.6594	1.9826	2.2737	3.3848
47	1.6779	2.0117	2.3155	3.5099	107	1.6592	1.9824	2.2734	3.3838
48	1.6772	2.0106	2.3139	3.5050	108	1.6591	1.9822	2.2731	3.3829
49	1.6766	2.0096	2.3124	3.5005	109	1.6590	1.9820	2.2728	3.3820
50	1.6759	2.0086	2.3109	3.4960	110	1.6588	1.9818	2.2725	3.3811
51	1.6753	2.0076	2.3095	3.4917	111	1.6587	1.9816	2.2722	3.3804
52	1.6747	2.0066	2.3082	3.4877	112	1.6586	1.9814	2.2719	3.3795
53	1.6741	2.0057	2.3069	3.4837	113	1.6584	1.9812	2.2717	3.3787
54	1.6736	2.0049	2.3056	3.4799	114	1.6583	1.9810	2.2714	3.3779
55	1.6730	2.0040	2.3044	3.4765	115	1.6582	1.9808	2.2711	3.3772
56	1.6725	2.0032	2.3033	3.4730	116	1.6581	1.9806	2.2709	3.3763
57	1.6720	2.0025	2.3022	3.4695	117	1.6580	1.9804	2.2706	3.3756
58	1.6716	2.0017	2.3011	3.4663	118	1.6579	1.9803	2.2704	3.3749
59	1.6711	2.0010	2.3000	3.4632	119	1.6578	1.9801	2.2701	3.3742
60	1.6706	2.0003	2.2990	3.4602	120	1.6576	1.9799	2.2699	3.3734

df: aantal vrijheidsgraden

BIJLAGE 3: RECHTER OVERSCHRIJDINGSKANSEN **VAN DE F-VERDELING**

$\alpha = 0,1$																
df1\df	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
1	39.86	49.50	53.59	55.83	57.24	58.20	58.91	59.44	59.86	60.19	60.47	60.71	60.90	61.07	61.22	61.35
2	8.53	9.00	9.16	9.24	9.29	9.33	9.35	9.37	9.38	9.39	9.40	9.41	9.41	9.42	9.42	9.43
3	5.54	5.46	5.39	5.34	5.31	5.28	5.27	5.25	5.24	5.23	5.22	5.22	5.21	5.20	5.20	5.20
4	4.54	4.32	4.19	4.11	4.05	4.01	3.98	3.95	3.94	3.92	3.91	3.90	3.89	3.88	3.87	3.86
5	4.06	3.78	3.62	3.52	3.45	3.40	3.37	3.34	3.32	3.30	3.28	3.27	3.26	3.25	3.24	3.23
6	3.78	3.46	3.29	3.18	3.11	3.05	3.01	2.98	2.96	2.94	2.92	2.90	2.89	2.88	2.87	2.86
7	3.59	3.26	3.07	2.96	2.88	2.83	2.78	2.75	2.72	2.70	2.68	2.67	2.65	2.64	2.63	2.62
8	3.46	3.11	2.92	2.81	2.73	2.67	2.62	2.59	2.56	2.54	2.52	2.50	2.49	2.48	2.46	2.45
9	3.36	3.01	2.81	2.69	2.61	2.55	2.51	2.47	2.44	2.42	2.40	2.38	2.36	2.35	2.34	2.33
10	3.29	2.92	2.73	2.61	2.52	2.46	2.41	2.38	2.35	2.32	2.30	2.28	2.27	2.26	2.24	2.23
11	3.23	2.86	2.66	2.54	2.45	2.39	2.34	2.30	2.27	2.25	2.23	2.21	2.19	2.18	2.17	2.16
12	3.18	2.81	2.61	2.48	2.39	2.33	2.28	2.24	2.21	2.19	2.17	2.15	2.13	2.12	2.10	2.09
13	3.14	2.76	2.56	2.43	2.35	2.28	2.23	2.20	2.16	2.14	2.12	2.10	2.08	2.07	2.05	2.04
14	3.10	2.73	2.52	2.39	2.31	2.24	2.19	2.15	2.12	2.10	2.07	2.05	2.04	2.02	2.01	2.00
15	3.07	2.70	2.49	2.36	2.27	2.21	2.16	2.12	2.09	2.06	2.04	2.02	2.00	1.99	1.97	1.96
16	3.05	2.67	2.46	2.33	2.24	2.18	2.13	2.09	2.06	2.03	2.01	1.99	1.97	1.95	1.94	1.93
17	3.03	2.64	2.44	2.31	2.22	2.15	2.10	2.06	2.03	2.00	1.98	1.96	1.94	1.93	1.91	1.90
18	3.01	2.62	2.42	2.29	2.20	2.13	2.08	2.04	2.00	1.98	1.95	1.93	1.92	1.90	1.89	1.87
19	2.99	2.61	2.40	2.27	2.18	2.11	2.06	2.02	1.98	1.96	1.93	1.91	1.89	1.88	1.86	1.85
20	2.97	2.59	2.38	2.25	2.16	2.09	2.04	2.00	1.96	1.94	1.91	1.89	1.87	1.86	1.84	1.83
25	2.92	2.53	2.32	2.18	2.09	2.02	1.97	1.93	1.89	1.87	1.84	1.82	1.80	1.79	1.77	1.76
30	2.88	2.49	2.28	2.14	2.05	1.98	1.93	1.88	1.85	1.82	1.79	1.77	1.75	1.74	1.72	1.71
35	2.85	2.46	2.25	2.11	2.02	1.95	1.90	1.85	1.82	1.79	1.76	1.74	1.72	1.70	1.69	1.67
40	2.84	2.44	2.23	2.09	2.00	1.93	1.87	1.83	1.79	1.76	1.74	1.71	1.70	1.68	1.66	1.65
45	2.82	2.42	2.21	2.07	1.98	1.91	1.85	1.81	1.77	1.74	1.72	1.70	1.68	1.66	1.64	1.63
50	2.81	2.41	2.20	2.06	1.97	1.90	1.84	1.80	1.76	1.73	1.70	1.68	1.66	1.64	1.63	1.61
60	2.79	2.39	2.18	2.04	1.95	1.87	1.82	1.77	1.74	1.71	1.68	1.66	1.64	1.62	1.60	1.59
70	2.78	2.38	2.16	2.03	1.93	1.86	1.80	1.76	1.72	1.69	1.66	1.64	1.62	1.60	1.59	1.57
80	2.77	2.37	2.15	2.02	1.92	1.85	1.79	1.75	1.71	1.68	1.65	1.63	1.61	1.59	1.57	1.56
90	2.76	2.36	2.15	2.01	1.91	1.84	1.78	1.74	1.70	1.67	1.64	1.62	1.60	1.58	1.56	1.55
100	2.76	2.36	2.14	2.00	1.91	1.83	1.78	1.73	1.69	1.66	1.64	1.61	1.59	1.57	1.56	1.54

$\alpha = 0,1$																
df1\df	17	18	19	20	25	30	35	40	45	50	60	70	80	90	100	
1	61.46	61.57	61.66	61.74	62.05	62.26	62.42	62.53	62.62	62.69	62.79	62.87	62.93	62.97	63.01	
2	9.43	9.44	9.44	9.44	9.45	9.46	9.46	9.47	9.47	9.47	9.47	9.48	9.48	9.48	9.48	
3	5.19	5.19	5.19	5.18	5.17	5.17	5.16	5.16	5.16	5.15	5.15	5.15	5.15	5.15	5.14	
4	3.86	3.85	3.85	3.84	3.83	3.82	3.81	3.80	3.80	3.80	3.79	3.79	3.78	3.78	3.78	
5	3.22	3.22	3.21	3.21	3.19	3.17	3.16	3.16	3.15	3.15	3.14	3.14	3.13	3.13	3.13	
6	2.85	2.85	2.84	2.84	2.81	2.80	2.79	2.78	2.77	2.77	2.76	2.76	2.75	2.75	2.75	
7	2.61	2.61	2.60	2.59	2.57	2.56	2.54	2.54	2.53	2.52	2.51	2.51	2.50	2.50	2.50	
8	2.45	2.44	2.43	2.42	2.40	2.38	2.37	2.36	2.35	2.35	2.34	2.33	2.33	2.32	2.32	
9	2.32	2.31	2.30	2.30	2.27	2.25	2.24	2.23	2.22	2.22	2.21	2.20	2.20	2.19	2.19	
10	2.22	2.22	2.21	2.20	2.17	2.16	2.14	2.13	2.12	2.12	2.11	2.10	2.09	2.09	2.09	
11	2.15	2.14	2.13	2.12	2.10	2.08	2.06	2.05	2.04	2.04	2.03	2.02	2.01	2.01	2.01	
12	2.08	2.08	2.07	2.06	2.03	2.01	2.00	1.99	1.98	1.97	1.96	1.95	1.95	1.94	1.94	
13	2.03	2.02	2.01	2.01	1.98	1.96	1.94	1.93	1.92	1.92	1.90	1.90	1.89	1.89	1.88	
14	1.99	1.98	1.97	1.96	1.93	1.91	1.90	1.89	1.88	1.87	1.86	1.85	1.84	1.84	1.83	
15	1.95	1.94	1.93	1.92	1.89	1.87	1.86	1.85	1.84	1.83	1.82	1.81	1.80	1.80	1.79	
16	1.92	1.91	1.90	1.89	1.86	1.84	1.82	1.81	1.80	1.79	1.78	1.77	1.77	1.76	1.76	
17	1.89	1.88	1.87	1.86	1.83	1.81	1.79	1.78	1.77	1.76	1.75	1.74	1.74	1.73	1.73	
18	1.86	1.85	1.84	1.84	1.80	1.78	1.77	1.75	1.74	1.74	1.72	1.71	1.71	1.70	1.70	
19	1.84	1.83	1.82	1.81	1.78	1.76	1.74	1.73	1.72	1.71	1.70	1.69	1.68	1.68	1.67	
20	1.82	1.81	1.80	1.79	1.76	1.74	1.72	1.71	1.70	1.69	1.68	1.67	1.66	1.65	1.65	
25	1.75	1.74	1.73	1.72	1.68	1.66	1.64	1.63	1.62	1.61	1.59	1.58	1.58	1.57	1.56	
30	1.70	1.69	1.68	1.67	1.63	1.61	1.59	1.57	1.56	1.55	1.54	1.53	1.52	1.51	1.51	
35	1.66	1.65	1.64	1.63	1.60	1.57	1.55	1.53	1.52	1.51	1.50	1.49	1.48	1.47	1.47	
40	1.64	1.62	1.61	1.61	1.57	1.54	1.52	1.51	1.49	1.48	1.47	1.46	1.45	1.44	1.43	
45	1.62	1.60	1.59	1.58	1.55	1.52	1.50	1.48	1.47	1.46	1.44	1.43	1.42	1.41	1.41	
50	1.60	1.59	1.58	1.57	1.53	1.50	1.48	1.46	1.45	1.44	1.42	1.41	1.40	1.39	1.39	
60	1.58	1.56	1.55	1.54	1.50	1.48	1.45	1.44	1.42	1.41	1.40	1.38	1.37	1.36	1.36	
70	1.56	1.55	1.54	1.53	1.49	1.46	1.43	1.42	1.40	1.39	1.37	1.36	1.35	1.34	1.34	
80	1.55	1.53	1.52	1.51	1.47	1.44	1.42	1.40	1.39	1.38	1.36	1.34	1.33	1.33	1.32	
90	1.54	1.52	1.51	1.50	1.46	1.43	1.41	1.39	1.38	1.36	1.35	1.33	1.32	1.31	1.30	
100	1.53	1.52	1.50	1.49	1.45	1.42	1.40	1.38	1.37	1.35	1.34	1.32	1.31	1.30	1.29	

df1: aantal vrijheidsgraden steekproef 1

df2: aantal vrijheidsgraden steekproef 2

(continued)

		$\alpha = 0.05$															
df\df		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
1		161	199	216	225	230	234	237	239	241	242	243	244	245	245	246	246
2		18.51	19.00	19.16	19.25	19.30	19.33	19.35	19.37	19.38	19.40	19.40	19.41	19.42	19.42	19.43	19.43
3		10.13	9.55	9.28	9.12	9.01	8.94	8.89	8.85	8.81	8.79	8.76	8.74	8.73	8.71	8.70	8.69
4		7.71	6.94	6.59	6.39	6.26	6.16	6.09	6.04	6.00	5.96	5.94	5.91	5.89	5.87	5.86	5.84
5		6.61	5.79	5.41	5.19	5.05	4.95	4.88	4.82	4.77	4.74	4.70	4.68	4.66	4.64	4.62	4.60
6		5.99	5.14	4.76	4.53	4.39	4.28	4.21	4.15	4.10	4.06	4.03	4.00	3.98	3.96	3.94	3.92
7		5.59	4.74	4.35	4.12	3.97	3.87	3.79	3.73	3.68	3.64	3.60	3.57	3.55	3.53	3.51	3.49
8		5.32	4.46	4.07	3.84	3.69	3.58	3.50	3.44	3.39	3.35	3.31	3.28	3.26	3.24	3.22	3.20
9		5.12	4.26	3.86	3.63	3.48	3.37	3.29	3.23	3.18	3.14	3.10	3.07	3.05	3.03	3.01	2.99
10		4.96	4.10	3.71	3.48	3.33	3.22	3.14	3.07	3.02	2.98	2.94	2.91	2.89	2.86	2.85	2.83
11		4.84	3.98	3.59	3.36	3.20	3.09	3.01	2.95	2.90	2.85	2.82	2.79	2.76	2.74	2.72	2.70
12		4.75	3.89	3.49	3.26	3.11	3.00	2.91	2.85	2.80	2.75	2.72	2.69	2.66	2.64	2.62	2.60
13		4.67	3.81	3.41	3.18	3.03	2.92	2.83	2.77	2.71	2.67	2.63	2.60	2.58	2.55	2.53	2.51
14		4.60	3.74	3.34	3.11	2.96	2.85	2.76	2.70	2.65	2.60	2.57	2.53	2.51	2.48	2.46	2.44
15		4.54	3.68	3.29	3.06	2.90	2.79	2.71	2.64	2.59	2.54	2.51	2.48	2.45	2.42	2.40	2.38
16		4.49	3.63	3.24	3.01	2.85	2.74	2.66	2.59	2.54	2.49	2.46	2.42	2.40	2.37	2.35	2.33
17		4.45	3.59	3.20	2.96	2.81	2.70	2.61	2.55	2.49	2.45	2.41	2.38	2.35	2.33	2.31	2.29
18		4.41	3.55	3.16	2.93	2.77	2.66	2.58	2.51	2.46	2.41	2.37	2.34	2.31	2.29	2.27	2.25
19		4.38	3.52	3.13	2.90	2.74	2.63	2.54	2.48	2.42	2.38	2.34	2.31	2.28	2.26	2.23	2.21
20		4.35	3.49	3.10	2.87	2.71	2.60	2.51	2.45	2.39	2.35	2.31	2.28	2.25	2.22	2.20	2.18
25		4.24	3.39	2.99	2.76	2.60	2.49	2.40	2.34	2.28	2.24	2.20	2.16	2.14	2.11	2.09	2.07
30		4.17	3.32	2.92	2.69	2.53	2.42	2.33	2.27	2.21	2.16	2.13	2.09	2.06	2.04	2.01	1.99
35		4.12	3.27	2.87	2.64	2.49	2.37	2.29	2.22	2.16	2.11	2.07	2.04	2.01	1.99	1.96	1.94
40		4.08	3.23	2.84	2.61	2.45	2.34	2.25	2.18	2.12	2.08	2.04	2.00	1.97	1.95	1.92	1.90
45		4.06	3.20	2.81	2.58	2.42	2.31	2.22	2.15	2.10	2.05	2.01	1.97	1.94	1.92	1.89	1.87
50		4.03	3.18	2.79	2.56	2.40	2.29	2.20	2.13	2.07	2.03	1.99	1.95	1.92	1.89	1.87	1.85
60		4.00	3.15	2.76	2.53	2.37	2.25	2.17	2.10	2.04	1.99	1.95	1.92	1.89	1.86	1.84	1.82
70		3.98	3.13	2.74	2.50	2.35	2.23	2.14	2.07	2.02	1.97	1.93	1.89	1.86	1.84	1.81	1.79
80		3.96	3.11	2.72	2.49	2.33	2.21	2.13	2.06	2.00	1.95	1.91	1.88	1.84	1.82	1.79	1.77
90		3.95	3.10	2.71	2.47	2.32	2.20	2.11	2.04	1.99	1.94	1.90	1.86	1.83	1.80	1.78	1.76
100		3.94	3.09	2.70	2.46	2.31	2.19	2.10	2.03	1.97	1.93	1.89	1.85	1.82	1.79	1.77	1.75

		$\alpha = 0.05$														
df1\df		17	18	19	20	25	30	35	40	45	50	60	70	80	90	100
1		247	247	248	248	249	250	251	251	251	252	252	252	253	253	253
2		19.44	19.44	19.44	19.45	19.46	19.46	19.47	19.47	19.47	19.48	19.48	19.48	19.48	19.48	19.49
3		8.68	8.67	8.67	8.66	8.63	8.62	8.60	8.59	8.59	8.58	8.57	8.57	8.56	8.56	8.55
4		5.83	5.82	5.81	5.80	5.77	5.75	5.73	5.72	5.71	5.70	5.69	5.68	5.67	5.67	5.66
5		4.59	4.58	4.57	4.56	4.52	4.50	4.48	4.46	4.45	4.44	4.43	4.42	4.41	4.41	4.41
6		3.91	3.90	3.88	3.87	3.83	3.81	3.79	3.77	3.76	3.75	3.74	3.73	3.72	3.72	3.71
7		3.48	3.47	3.46	3.44	3.40	3.38	3.36	3.34	3.33	3.32	3.30	3.29	3.29	3.28	3.27
8		3.19	3.17	3.16	3.15	3.11	3.08	3.06	3.04	3.03	3.02	3.01	2.99	2.99	2.98	2.97
9		2.97	2.96	2.95	2.94	2.89	2.86	2.84	2.83	2.81	2.80	2.79	2.78	2.77	2.76	2.76
10		2.81	2.80	2.79	2.77	2.73	2.70	2.68	2.66	2.65	2.64	2.62	2.61	2.60	2.59	2.59
11		2.69	2.67	2.66	2.65	2.60	2.57	2.55	2.53	2.52	2.51	2.49	2.48	2.47	2.46	2.46
12		2.58	2.57	2.56	2.54	2.50	2.47	2.44	2.43	2.41	2.40	2.38	2.37	2.36	2.36	2.35
13		2.50	2.48	2.47	2.46	2.41	2.38	2.36	2.34	2.33	2.31	2.30	2.28	2.27	2.27	2.26
14		2.43	2.41	2.40	2.39	2.34	2.31	2.28	2.27	2.25	2.24	2.22	2.21	2.20	2.19	2.19
15		2.37	2.35	2.34	2.33	2.28	2.25	2.22	2.20	2.19	2.18	2.16	2.15	2.14	2.13	2.12
16		2.32	2.30	2.29	2.28	2.23	2.19	2.17	2.15	2.14	2.12	2.11	2.09	2.08	2.07	2.07
17		2.27	2.26	2.24	2.23	2.18	2.15	2.12	2.10	2.09	2.08	2.06	2.05	2.03	2.03	2.02
18		2.23	2.22	2.20	2.19	2.14	2.11	2.08	2.06	2.05	2.04	2.02	2.00	1.99	1.98	1.98
19		2.20	2.18	2.17	2.16	2.11	2.07	2.05	2.03	2.01	2.00	1.98	1.97	1.96	1.95	1.94
20		2.17	2.15	2.14	2.12	2.07	2.04	2.01	1.99	1.98	1.97	1.95	1.93	1.92	1.91	1.91
25		2.05	2.04	2.02	2.01	1.96	1.92	1.89	1.87	1.86	1.84	1.82	1.81	1.80	1.79	1.78
30		1.98	1.96	1.95	1.93	1.88	1.84	1.81	1.79	1.77	1.76	1.74	1.72	1.71	1.70	1.70
35		1.92	1.91	1.89	1.88	1.82	1.79	1.76	1.74	1.72	1.70	1.68	1.66	1.65	1.64	1.63
40		1.89	1.87	1.85	1.84	1.78	1.74	1.72	1.69	1.67	1.66	1.64	1.62	1.61	1.60	1.59
45		1.86	1.84	1.82	1.81	1.75	1.71	1.68	1.66	1.64	1.63	1.60	1.59	1.57	1.56	1.55
50		1.83	1.81	1.80	1.78	1.73	1.69	1.66	1.63	1.61	1.60	1.58	1.56	1.54	1.53	1.52
60		1.80	1.78	1.76	1.75	1.69	1.65	1.62	1.59	1.57	1.56	1.53	1.52	1.50	1.49	1.48
70		1.77	1.75	1.74	1.72	1.66	1.62	1.59	1.57	1.55	1.53	1.50	1.49	1.47	1.46	1.45
80		1.75	1.73	1.72	1.70	1.64	1.60	1.57	1.54	1.52	1.51	1.48	1.46	1.45	1.44	1.43
90		1.74	1.72	1.70	1.69	1.63	1.59	1.55	1.53	1.51	1.49	1.46	1.44	1.43	1.42	1.41
100		1.73	1.71	1.69	1.68	1.62	1.57	1.54	1.52	1.49	1.48	1.45	1.43	1.41	1.40	1.39

df1: aantal vrijheidsgraden steekproef 1

df2: aantal vrijheidsgraden steekproef 2

(continued)

		$\alpha = 0.025$															
df1\df		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
1		648	799	864	900	922	937	948	957	963	969	973	977	980	983	985	987
2		38.51	39.00	39.17	39.25	39.30	39.33	39.36	39.37	39.39	39.40	39.41	39.41	39.42	39.43	39.43	39.44
3		17.44	16.04	15.44	15.10	14.88	14.73	14.62	14.54	14.47	14.42	14.37	14.34	14.30	14.28	14.25	14.23
4		12.22	10.65	9.98	9.60	9.36	9.20	9.07	8.98	8.90	8.84	8.79	8.75	8.72	8.68	8.66	8.63
5		10.01	8.43	7.76	7.39	7.15	6.98	6.85	6.76	6.68	6.62	6.57	6.52	6.49	6.46	6.43	6.40
6		8.81	7.26	6.60	6.23	5.99	5.82	5.70	5.60	5.52	5.46	5.41	5.37	5.33	5.30	5.27	5.24
7		8.07	6.54	5.89	5.52	5.29	5.12	4.99	4.90	4.82	4.76	4.71	4.67	4.63	4.60	4.57	4.54
8		7.57	6.06	5.42	5.05	4.82	4.65	4.53	4.43	4.36	4.30	4.24	4.20	4.16	4.13	4.10	4.08
9		7.21	5.71	5.08	4.72	4.48	4.32	4.20	4.10	4.03	3.96	3.91	3.87	3.83	3.80	3.77	3.74
10		6.94	5.46	4.83	4.47	4.24	4.07	3.95	3.85	3.78	3.72	3.66	3.62	3.58	3.55	3.52	3.50
11		6.72	5.26	4.63	4.28	4.04	3.88	3.76	3.66	3.59	3.53	3.47	3.43	3.39	3.36	3.33	3.30
12		6.55	5.10	4.47	4.12	3.89	3.73	3.61	3.51	3.44	3.37	3.32	3.28	3.24	3.21	3.18	3.15
13		6.41	4.97	4.35	4.00	3.77	3.60	3.48	3.39	3.31	3.25	3.20	3.15	3.12	3.08	3.05	3.03
14		6.30	4.86	4.24	3.89	3.66	3.50	3.38	3.29	3.21	3.15	3.09	3.05	3.01	2.98	2.95	2.92
15		6.20	4.77	4.15	3.80	3.58	3.41	3.29	3.20	3.12	3.06	3.01	2.96	2.92	2.89	2.86	2.84
16		6.12	4.69	4.08	3.73	3.50	3.34	3.22	3.12	3.05	2.99	2.93	2.89	2.85	2.82	2.79	2.76
17		6.04	4.62	4.01	3.66	3.44	3.28	3.16	3.06	2.98	2.92	2.87	2.82	2.79	2.75	2.72	2.70
18		5.98	4.56	3.95	3.61	3.38	3.22	3.10	3.01	2.93	2.87	2.81	2.77	2.73	2.70	2.67	2.64
19		5.92	4.51	3.90	3.56	3.33	3.17	3.05	2.96	2.88	2.82	2.76	2.72	2.68	2.65	2.62	2.59
20		5.87	4.46	3.86	3.51	3.29	3.13	3.01	2.91	2.84	2.77	2.72	2.68	2.64	2.60	2.57	2.55
25		5.69	4.29	3.69	3.35	3.13	2.97	2.85	2.75	2.68	2.61	2.56	2.51	2.48	2.44	2.41	2.38
30		5.57	4.18	3.59	3.25	3.03	2.87	2.75	2.65	2.57	2.51	2.46	2.41	2.37	2.34	2.31	2.28
35		5.48	4.11	3.52	3.18	2.96	2.80	2.68	2.58	2.50	2.44	2.39	2.34	2.30	2.27	2.23	2.21
40		5.42	4.05	3.46	3.13	2.90	2.74	2.62	2.53	2.45	2.39	2.33	2.29	2.25	2.21	2.18	2.15
45		5.38	4.01	3.42	3.09	2.86	2.70	2.58	2.49	2.41	2.35	2.29	2.25	2.21	2.17	2.14	2.11
50		5.34	3.97	3.39	3.05	2.83	2.67	2.55	2.46	2.38	2.32	2.26	2.22	2.18	2.14	2.11	2.08
60		5.29	3.93	3.34	3.01	2.79	2.63	2.51	2.41	2.33	2.27	2.22	2.17	2.13	2.09	2.06	2.03
70		5.25	3.89	3.31	2.97	2.75	2.59	2.47	2.38	2.30	2.24	2.18	2.14	2.10	2.06	2.03	2.00
80		5.22	3.86	3.28	2.95	2.73	2.57	2.45	2.35	2.28	2.21	2.16	2.11	2.07	2.03	2.00	1.97
90		5.20	3.84	3.26	2.93	2.71	2.55	2.43	2.34	2.26	2.19	2.14	2.09	2.05	2.02	1.98	1.95
100		5.18	3.83	3.25	2.92	2.70	2.54	2.42	2.32	2.24	2.18	2.12	2.08	2.04	2.00	1.97	1.94

		$\alpha = 0.025$														
df1\df		17	18	19	20	25	30	35	40	45	50	60	70	80	90	100
1		989	990	992	993	998	1001	1004	1006	1007	1008	1010	1011	1012	1013	1013
2		39.44	39.44	39.45	39.45	39.46	39.46	39.47	39.47	39.48	39.48	39.48	39.48	39.49	39.49	39.49
3		14.21	14.20	14.18	14.17	14.12	14.08	14.06	14.04	14.02	14.01	13.99	13.98	13.97	13.96	13.96
4		8.61	8.59	8.58	8.56	8.50	8.46	8.43	8.41	8.39	8.38	8.36	8.35	8.33	8.33	8.32
5		6.38	6.36	6.34	6.33	6.27	6.23	6.20	6.18	6.16	6.14	6.12	6.11	6.10	6.09	6.08
6		5.22	5.20	5.18	5.17	5.11	5.07	5.04	5.01	4.99	4.98	4.96	4.94	4.93	4.92	4.92
7		4.52	4.50	4.48	4.47	4.40	4.36	4.33	4.31	4.29	4.28	4.25	4.24	4.23	4.22	4.21
8		4.05	4.03	4.02	4.00	3.94	3.89	3.86	3.84	3.82	3.81	3.78	3.77	3.76	3.75	3.74
9		3.72	3.70	3.68	3.67	3.60	3.56	3.53	3.51	3.49	3.47	3.45	3.43	3.42	3.41	3.40
10		3.47	3.45	3.44	3.42	3.35	3.31	3.28	3.26	3.24	3.22	3.20	3.18	3.17	3.16	3.15
11		3.28	3.26	3.24	3.23	3.16	3.12	3.09	3.06	3.04	3.03	3.00	2.99	2.97	2.96	2.96
12		3.13	3.11	3.09	3.07	3.01	2.96	2.93	2.91	2.89	2.87	2.85	2.83	2.82	2.81	2.80
13		3.00	2.98	2.96	2.95	2.88	2.84	2.80	2.78	2.76	2.74	2.72	2.70	2.69	2.68	2.67
14		2.90	2.88	2.86	2.84	2.78	2.73	2.70	2.67	2.65	2.64	2.61	2.60	2.58	2.57	2.56
15		2.81	2.79	2.77	2.76	2.69	2.64	2.61	2.59	2.56	2.55	2.52	2.51	2.49	2.48	2.47
16		2.74	2.72	2.70	2.68	2.61	2.57	2.53	2.51	2.49	2.47	2.45	2.43	2.42	2.40	2.40
17		2.67	2.65	2.63	2.62	2.55	2.50	2.47	2.44	2.42	2.41	2.38	2.36	2.35	2.34	2.33
18		2.62	2.60	2.58	2.56	2.49	2.44	2.41	2.38	2.36	2.35	2.32	2.30	2.29	2.28	2.27
19		2.57	2.55	2.53	2.51	2.44	2.39	2.36	2.33	2.31	2.30	2.27	2.25	2.24	2.23	2.22
20		2.52	2.50	2.48	2.46	2.40	2.35	2.31	2.29	2.27	2.25	2.22	2.20	2.19	2.18	2.17
25		2.36	2.34	2.32	2.30	2.23	2.18	2.15	2.12	2.10	2.08	2.05	2.03	2.02	2.01	2.00
30		2.26	2.23	2.21	2.20	2.12	2.07	2.04	2.01	1.99	1.97	1.94	1.92	1.90	1.89	1.88
35		2.18	2.16	2.14	2.12	2.05	2.00	1.96	1.93	1.91	1.89	1.86	1.84	1.82	1.81	1.80
40		2.13	2.11	2.09	2.07	1.99	1.94	1.90	1.88	1.85	1.83	1.80	1.78	1.76	1.75	1.74
45		2.09	2.07	2.04	2.03	1.95	1.90	1.86	1.83	1.81	1.79	1.76	1.74	1.72	1.70	1.69
50		2.06	2.03	2.01	1.99	1.92	1.87	1.83	1.80	1.77	1.75	1.72	1.70	1.68	1.67	1.66
60		2.01	1.98	1.96	1.94	1.87	1.82	1.78	1.74	1.72	1.70	1.67	1.64	1.63	1.61	1.60
70		1.97	1.95	1.93	1.91	1.83	1.78	1.74	1.71	1.68	1.66	1.63	1.60	1.59	1.57	1.56
80		1.95	1.92	1.90	1.88	1.81	1.75	1.71	1.68	1.65	1.63	1.60	1.57	1.55	1.54	1.53
90		1.93	1.91	1.88	1.86	1.79	1.73	1.69	1.66	1.63	1.61	1.58	1.55	1.53	1.52	1.50
100		1.91	1.89	1.87	1.85	1.77	1.71	1.67	1.64	1.61	1.59	1.56	1.53	1.51	1.50	1.48

df1: aantal vrijheidsgraden steekproef 1

df2: aantal vrijheidsgraden steekproef 2

(continued)

		$\alpha = 0.01$															
df\df		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
1		4052	4999	5404	5624	5764	5859	5928	5981	6022	6056	6083	6107	6126	6143	6157	6170
2		98.50	99.00	99.16	99.25	99.30	99.33	99.36	99.38	99.39	99.40	99.41	99.42	99.42	99.43	99.43	99.44
3		34.12	30.82	29.46	28.71	28.24	27.91	27.67	27.49	27.34	27.23	27.13	27.05	26.98	26.92	26.87	26.83
4		21.20	18.00	16.69	15.98	15.52	15.21	14.98	14.80	14.66	14.55	14.45	14.37	14.31	14.25	14.20	14.15
5		16.26	13.27	12.06	11.39	10.97	10.67	10.46	10.29	10.16	10.05	9.96	9.89	9.82	9.77	9.72	9.68
6		13.75	10.92	9.78	9.15	8.75	8.47	8.26	8.10	7.98	7.87	7.79	7.72	7.66	7.60	7.56	7.52
7		12.25	9.55	8.45	7.85	7.46	7.19	6.99	6.84	6.72	6.62	6.54	6.47	6.41	6.36	6.31	6.28
8		11.26	8.65	7.59	7.01	6.63	6.37	6.18	6.03	5.91	5.81	5.73	5.67	5.61	5.56	5.52	5.48
9		10.56	8.02	6.99	6.42	6.06	5.80	5.61	5.47	5.35	5.26	5.18	5.11	5.05	5.01	4.96	4.92
10		10.04	7.56	6.55	5.99	5.64	5.39	5.20	5.06	4.94	4.85	4.77	4.71	4.65	4.60	4.56	4.52
11		9.65	7.21	6.22	5.67	5.32	5.07	4.89	4.74	4.63	4.54	4.46	4.40	4.34	4.29	4.25	4.21
12		9.33	6.93	5.95	5.41	5.06	4.82	4.64	4.50	4.39	4.30	4.22	4.16	4.10	4.05	4.01	3.97
13		9.07	6.70	5.74	5.21	4.86	4.62	4.44	4.30	4.19	4.10	4.02	3.96	3.91	3.86	3.82	3.78
14		8.86	6.51	5.56	5.04	4.69	4.46	4.28	4.14	4.03	3.94	3.86	3.80	3.75	3.70	3.66	3.62
15		8.68	6.36	5.42	4.89	4.56	4.32	4.14	4.00	3.89	3.80	3.73	3.67	3.61	3.56	3.52	3.49
16		8.53	6.23	5.29	4.77	4.44	4.20	4.03	3.89	3.78	3.69	3.62	3.55	3.50	3.45	3.41	3.37
17		8.40	6.11	5.19	4.67	4.34	4.10	3.93	3.79	3.68	3.59	3.52	3.46	3.40	3.35	3.31	3.27
18		8.29	6.01	5.09	4.58	4.25	4.01	3.84	3.71	3.60	3.51	3.43	3.37	3.32	3.27	3.23	3.19
19		8.18	5.93	5.01	4.50	4.17	3.94	3.77	3.63	3.52	3.43	3.36	3.30	3.24	3.19	3.15	3.12
20		8.10	5.85	4.94	4.43	4.10	3.87	3.70	3.56	3.46	3.37	3.29	3.23	3.18	3.13	3.09	3.05
25		7.77	5.57	4.68	4.18	3.85	3.63	3.46	3.32	3.22	3.13	3.06	2.99	2.94	2.89	2.85	2.81
30		7.56	5.39	4.51	4.02	3.70	3.47	3.30	3.17	3.07	2.98	2.91	2.84	2.79	2.74	2.70	2.66
35		7.42	5.27	4.40	3.91	3.59	3.37	3.20	3.07	2.96	2.88	2.80	2.74	2.69	2.64	2.60	2.56
40		7.31	5.18	4.31	3.83	3.51	3.29	3.12	2.99	2.89	2.80	2.73	2.66	2.61	2.56	2.52	2.48
45		7.23	5.11	4.25	3.77	3.45	3.23	3.07	2.94	2.83	2.74	2.67	2.61	2.55	2.51	2.46	2.43
50		7.17	5.06	4.20	3.72	3.41	3.19	3.02	2.89	2.78	2.70	2.63	2.56	2.51	2.46	2.42	2.38
60		7.08	4.98	4.13	3.65	3.34	3.12	2.95	2.82	2.72	2.63	2.56	2.50	2.44	2.39	2.35	2.31
70		7.01	4.92	4.07	3.60	3.29	3.07	2.91	2.78	2.67	2.59	2.51	2.45	2.40	2.35	2.31	2.27
80		6.96	4.88	4.04	3.56	3.26	3.04	2.87	2.74	2.64	2.55	2.48	2.42	2.36	2.31	2.27	2.23
90		6.93	4.85	4.01	3.53	3.23	3.01	2.84	2.72	2.61	2.52	2.45	2.39	2.33	2.29	2.24	2.21
100		6.90	4.82	3.98	3.51	3.21	2.99	2.82	2.69	2.59	2.50	2.43	2.37	2.31	2.27	2.22	2.19

		$\alpha = 0.01$																
df1\df		17	18	19	20	25	30	35	40	45	50	60	70	80	90	100		
1		6181	6191	6201	6209	6240	6260	6275	6286	6296	6302	6313	6321	6326	6331	6334		
2		99.44	99.44	99.45	99.45	99.46	99.47	99.47	99.48	99.48	99.48	99.48	99.48	99.48	99.49	99.49		
3		26.79	26.75	26.72	26.69	26.58	26.50	26.45	26.41	26.38	26.35	26.32	26.29	26.27	26.25	26.24		
4		14.11	14.08	14.05	14.02	13.91	13.84	13.79	13.75	13.71	13.69	13.65	13.63	13.61	13.59	13.58		
5		9.64	9.61	9.58	9.55	9.45	9.38	9.33	9.29	9.26	9.24	9.20	9.18	9.16	9.14	9.13		
6		7.48	7.45	7.42	7.40	7.30	7.23	7.18	7.14	7.11	7.09	7.06	7.03	7.01	7.00	6.99		
7		6.24	6.21	6.18	6.16	6.06	5.99	5.94	5.91	5.88	5.86	5.82	5.80	5.78	5.77	5.75		
8		5.44	5.41	5.38	5.36	5.26	5.20	5.15	5.12	5.09	5.07	5.03	5.01	4.99	4.97	4.96		
9		4.89	4.86	4.83	4.81	4.71	4.65	4.60	4.57	4.54	4.52	4.48	4.46	4.44	4.43	4.41		
10		4.49	4.46	4.43	4.41	4.31	4.25	4.20	4.17	4.14	4.12	4.08	4.06	4.04	4.03	4.01		
11		4.18	4.15	4.12	4.10	4.01	3.94	3.89	3.86	3.83	3.81	3.78	3.75	3.73	3.72	3.71		
12		3.94	3.91	3.88	3.86	3.76	3.70	3.65	3.62	3.59	3.57	3.54	3.51	3.49	3.48	3.47		
13		3.75	3.72	3.69	3.66	3.57	3.51	3.46	3.43	3.40	3.38	3.34	3.32	3.30	3.28	3.27		
14		3.59	3.56	3.53	3.51	3.41	3.35	3.30	3.27	3.24	3.22	3.18	3.16	3.14	3.12	3.11		
15		3.45	3.42	3.40	3.37	3.28	3.21	3.17	3.13	3.10	3.08	3.05	3.02	3.00	2.99	2.98		
16		3.34	3.31	3.28	3.26	3.16	3.10	3.05	3.02	2.99	2.97	2.93	2.91	2.89	2.87	2.86		
17		3.24	3.21	3.19	3.16	3.07	3.00	2.96	2.92	2.89	2.87	2.83	2.81	2.79	2.78	2.76		
18		3.16	3.13	3.10	3.08	2.98	2.92	2.87	2.84	2.81	2.78	2.75	2.72	2.70	2.69	2.68		
19		3.08	3.05	3.03	3.00	2.91	2.84	2.80	2.76	2.73	2.71	2.67	2.65	2.63	2.61	2.60		
20		3.02	2.99	2.96	2.94	2.84	2.78	2.73	2.69	2.67	2.64	2.61	2.58	2.56	2.55	2.54		
25		2.78	2.75	2.72	2.70	2.60	2.54	2.49	2.45	2.42	2.40	2.36	2.34	2.32	2.30	2.29		
30		2.63	2.60	2.57	2.55	2.45	2.39	2.34	2.30	2.27	2.25	2.21	2.18	2.16	2.14	2.13		
35		2.53	2.50	2.47	2.44	2.35	2.28	2.23	2.19	2.16	2.14	2.10	2.07	2.05	2.03	2.02		
40		2.45	2.42	2.39	2.37	2.27	2.20	2.15	2.11	2.08	2.06	2.02	1.99	1.97	1.95	1.94		
45		2.39	2.36	2.34	2.31	2.21	2.14	2.09	2.05	2.02	2.00	1.96	1.93	1.91	1.89	1.88		
50		2.35	2.32	2.29	2.27	2.17	2.10	2.05	2.01	1.97	1.95	1.91	1.88	1.86	1.84	1.82		
60		2.28	2.25	2.22	2.20	2.10	2.03	1.98	1.94	1.90	1.88	1.84	1.81	1.78	1.76	1.75		
70		2.23	2.20	2.18	2.15	2.05	1.98	1.93	1.89	1.85	1.83	1.78	1.75	1.73	1.71	1.70		
80		2.20	2.17	2.14	2.12	2.01	1.94	1.89	1.85	1.82	1.79	1.75	1.71	1.69	1.67	1.65		
90		2.17	2.14	2.11	2.09	1.99	1.92	1.86	1.82	1.79	1.76	1.72	1.68	1.66	1.64	1.62		
100		2.15	2.12	2.09	2.07	1.97	1.89	1.84	1.80	1.76	1.74	1.69	1.66	1.63	1.61	1.60		

df1: aantal vrijheidsgraden steekproef 1

df2: aantal vrijheidsgraden steekproef 2

BIJLAGE 4: OVERSCHRIJDINGSKANSEN VAN DE χ^2 -VERDELING

df	0.99	0.975	0.95	0.9	0.1	0.05	0.025	0.01
1	0.0002	0.0010	0.0039	0.0158	2.7055	3.8415	5.0239	6.6349
2	0.0201	0.0506	0.1026	0.2107	4.6052	5.9915	7.3778	9.2104
3	0.1148	0.2158	0.3518	0.5844	6.2514	7.8147	9.3484	11.3449
4	0.2971	0.4844	0.7107	1.0636	7.7794	9.4877	11.1433	13.2767
5	0.5543	0.8312	1.1455	1.6103	9.2363	11.0705	12.8325	15.0863
6	0.8721	1.2373	1.6354	2.2041	10.6446	12.5916	14.4494	16.8119
7	1.2390	1.6899	2.1673	2.8331	12.0170	14.0671	16.0128	18.4753
8	1.6465	2.1797	2.7326	3.4895	13.3616	15.5073	17.5345	20.0902
9	2.0879	2.7004	3.3251	4.1682	14.6837	16.9190	19.0228	21.6660
10	2.5582	3.2470	3.9403	4.8652	15.9872	18.3070	20.4832	23.2093
11	3.0535	3.8157	4.5748	5.5778	17.2750	19.6752	21.9200	24.7250
12	3.5706	4.4038	5.2260	6.3038	18.5493	21.0261	23.3367	26.2170
13	4.1069	5.0087	5.8919	7.0415	19.8119	22.3620	24.7356	27.6882
14	4.6604	5.6287	6.5706	7.7895	21.0641	23.6848	26.1189	29.1412
15	5.2294	6.2621	7.2609	8.5468	22.3071	24.9958	27.4884	30.5780
16	5.8122	6.9077	7.9616	9.3122	23.5418	26.2962	28.8453	31.9999
17	6.4077	7.5642	8.6718	10.0852	24.7690	27.5871	30.1910	33.4087
18	7.0149	8.2307	9.3904	10.8649	25.9894	28.8693	31.5264	34.8052
19	7.6327	8.9065	10.1170	11.6509	27.2036	30.1435	32.8523	36.1908
20	8.2604	9.5908	10.8508	12.4426	28.4120	31.4104	34.1696	37.5663
21	8.8972	10.2829	11.5913	13.2396	29.6151	32.6706	35.4789	38.9322
22	9.5425	10.9823	12.3380	14.0415	30.8133	33.9245	36.7807	40.2894
23	10.1957	11.6885	13.0905	14.8480	32.0069	35.1725	38.0756	41.6383
24	10.8563	12.4011	13.8484	15.6587	33.1962	36.4150	39.3641	42.9798
25	11.5240	13.1197	14.6114	16.4734	34.3816	37.6525	40.6465	44.3140
26	12.1982	13.8439	15.3792	17.2919	35.5632	38.8851	41.9231	45.6416
27	12.8785	14.5734	16.1514	18.1139	36.7412	40.1133	43.1945	46.9628
28	13.5647	15.3079	16.9279	18.9392	37.9159	41.3372	44.4608	48.2782
29	14.2564	16.0471	17.7084	19.7677	39.0875	42.5569	45.7223	49.5878
30	14.9535	16.7908	18.4927	20.5992	40.2560	43.7730	46.9792	50.8922
31	15.6555	17.5387	19.2806	21.4336	41.4217	44.9853	48.2319	52.1914
32	16.3622	18.2908	20.0719	22.2706	42.5847	46.1942	49.4804	53.4857
33	17.0735	19.0467	20.8665	23.1102	43.7452	47.3999	50.7251	54.7754
34	17.7891	19.8062	21.6643	23.9522	44.9032	48.6024	51.9660	56.0609
35	18.5089	20.5694	22.4650	24.7966	46.0588	49.8018	53.2033	57.3420
36	19.2326	21.3359	23.2686	25.6433	47.2122	50.9985	54.4373	58.6192
37	19.9603	22.1056	24.0749	26.4921	48.3634	52.1923	55.6680	59.8926
38	20.6914	22.8785	24.8839	27.3430	49.5126	53.3835	56.8955	61.1620
39	21.4261	23.6543	25.6954	28.1958	50.6598	54.5722	58.1201	62.4281
40	22.1642	24.4331	26.5093	29.0505	51.8050	55.7585	59.3417	63.6908

(continued)

df	0.99	0.975	0.95	0.9	0.1	0.05	0.025	0.01
41	22.9056	25.2145	27.3256	29.9071	52.9485	56.9424	60.5606	64.9500
42	23.6501	25.9987	28.1440	30.7654	54.0902	58.1240	61.7767	66.2063
43	24.3976	26.7854	28.9647	31.6255	55.2302	59.3035	62.9903	67.4593
44	25.1480	27.5745	29.7875	32.4871	56.3685	60.4809	64.2014	68.7096
45	25.9012	28.3662	30.6123	33.3504	57.5053	61.6562	65.4101	69.9569
46	26.6572	29.1600	31.4390	34.2152	58.6405	62.8296	66.6165	71.2015
47	27.4158	29.9562	32.2676	35.0814	59.7743	64.0011	67.8206	72.4432
48	28.1770	30.7545	33.0981	35.9491	60.9066	65.1708	69.0226	73.6826
49	28.9406	31.5549	33.9303	36.8182	62.0375	66.3387	70.2224	74.9194
50	29.7067	32.3574	34.7642	37.6886	63.1671	67.5048	71.4202	76.1538
51	30.4750	33.1618	35.5999	38.5604	64.2954	68.6693	72.6160	77.3860
52	31.2457	33.9681	36.4371	39.4334	65.4224	69.8322	73.8099	78.6156
53	32.0185	34.7763	37.2759	40.3076	66.5482	70.9934	75.0019	79.8434
54	32.7934	35.5863	38.1162	41.1830	67.6728	72.1532	76.1921	81.0688
55	33.5705	36.3981	38.9581	42.0596	68.7962	73.3115	77.3804	82.2920
56	34.3495	37.2116	39.8013	42.9373	69.9185	74.4683	78.5671	83.5136
57	35.1306	38.0267	40.6459	43.8162	71.0397	75.6237	79.7522	84.7327
58	35.9135	38.8435	41.4920	44.6960	72.1598	76.7778	80.9356	85.9501
59	36.6982	39.6619	42.3393	45.5769	73.2789	77.9305	82.1174	87.1658
60	37.4848	40.4817	43.1880	46.4589	74.3970	79.0820	83.2977	88.3794
61	38.2732	41.3032	44.0379	47.3418	75.5141	80.2321	84.4764	89.5912
62	39.0633	42.1260	44.8890	48.2257	76.6302	81.3810	85.6537	90.8015
63	39.8551	42.9503	45.7414	49.1105	77.7454	82.5287	86.8296	92.0099
64	40.6485	43.7759	46.5949	49.9963	78.8597	83.6752	88.0040	93.2167
65	41.4436	44.6030	47.4496	50.8829	79.9730	84.8206	89.1772	94.4220
66	42.2402	45.4314	48.3054	51.7705	81.0855	85.9649	90.3488	95.6256
67	43.0384	46.2610	49.1623	52.6589	82.1971	87.1080	91.5193	96.8277
68	43.8380	47.0919	50.0203	53.5481	83.3079	88.2502	92.6885	98.0283
69	44.6392	47.9241	50.8792	54.4381	84.4179	89.3912	93.8565	99.2274
70	45.4417	48.7575	51.7393	55.3289	85.5270	90.5313	95.0231	100.4251
71	46.2456	49.5922	52.6003	56.2206	86.6354	91.6703	96.1887	101.6214
72	47.0510	50.4279	53.4623	57.1129	87.7431	92.8083	97.3530	102.8163
73	47.8577	51.2648	54.3253	58.0061	88.8499	93.9453	98.5162	104.0098
74	48.6657	52.1028	55.1892	58.9000	89.9561	95.0815	99.6784	105.2019
75	49.4751	52.9419	56.0541	59.7946	91.0615	96.2167	100.8393	106.3929
76	50.2855	53.7821	56.9198	60.6899	92.1662	97.3510	101.9992	107.5824
77	51.0973	54.6233	57.7865	61.5859	93.2702	98.4844	103.1581	108.7709
78	51.9104	55.4656	58.6539	62.4825	94.3735	99.6170	104.3159	109.9582
79	52.7248	56.3089	59.5223	63.3799	95.4762	100.7486	105.4727	111.1440
80	53.5400	57.1532	60.3915	64.2778	96.5782	101.8795	106.6285	112.3288

(continued)

df	0.99	0.975	0.95	0.9	0.1	0.05	0.025	0.01
81	54.3567	57.9984	61.2615	65.1765	97.6796	103.0095	107.7834	113.5123
82	55.1743	58.8447	62.1323	66.0757	98.7803	104.1387	108.9373	114.6948
83	55.9930	59.6917	63.0039	66.9756	99.8805	105.2672	110.0902	115.8762
84	56.8129	60.5398	63.8762	67.8761	100.9800	106.3949	111.2422	117.0566
85	57.6339	61.3888	64.7494	68.7771	102.0789	107.5217	112.3933	118.2356
86	58.4559	62.2386	65.6233	69.6788	103.1773	108.6479	113.5436	119.4137
87	59.2791	63.0894	66.4979	70.5810	104.2750	109.7733	114.6929	120.5909
88	60.1029	63.9409	67.3732	71.4839	105.3723	110.8980	115.8415	121.7672
89	60.9280	64.7934	68.2493	72.3872	106.4689	112.0220	116.9890	122.9422
90	61.7540	65.6466	69.1260	73.2911	107.5650	113.1452	118.1359	124.1162
91	62.5810	66.5007	70.0035	74.1955	108.6606	114.2679	119.2820	125.2893
92	63.4089	67.3556	70.8816	75.1005	109.7556	115.3898	120.4270	126.4616
93	64.2380	68.2112	71.7603	76.0059	110.8501	116.5110	121.5714	127.6330
94	65.0676	69.0676	72.6398	76.9119	111.9442	117.6317	122.7152	128.8032
95	65.8983	69.9249	73.5198	77.8184	113.0377	118.7516	123.8580	129.9725
96	66.7300	70.7828	74.4006	78.7254	114.1307	119.8709	125.0001	131.1411
97	67.5623	71.6415	75.2818	79.6329	115.2232	120.9897	126.1414	132.3089
98	68.3957	72.5009	76.1638	80.5408	116.3153	122.1077	127.2821	133.4756
99	69.2299	73.3611	77.0463	81.4492	117.4069	123.2252	128.4219	134.6415
100	70.0650	74.2219	77.9294	82.3581	118.4980	124.3421	129.5613	135.8069
101	70.9007	75.0835	78.8132	83.2675	119.5887	125.4584	130.6996	136.9711
102	71.7373	75.9457	79.6975	84.1773	120.6789	126.5741	131.8375	138.1343
103	72.5748	76.8086	80.5823	85.0875	121.7686	127.6893	132.9746	139.2973
104	73.4129	77.6721	81.4678	85.9982	122.8580	128.8039	134.1112	140.4590
105	74.2521	78.5364	82.3537	86.9093	123.9469	129.9179	135.2470	141.6203
106	75.0918	79.4013	83.2402	87.8208	125.0353	131.0315	136.3821	142.7803
107	75.9324	80.2668	84.1273	88.7327	126.1234	132.1444	137.5167	143.9399
108	76.7737	81.1329	85.0149	89.6451	127.2110	133.2569	138.6506	145.0989
109	77.6156	81.9997	85.9030	90.5579	128.2983	134.3687	139.7839	146.2568
110	78.4582	82.8671	86.7916	91.4710	129.3852	135.4802	140.9165	147.4143
111	79.3017	83.7350	87.6808	92.3846	130.4716	136.5911	142.0486	148.5710
112	80.1459	84.6036	88.5704	93.2985	131.5576	137.7014	143.1801	149.7269
113	80.9906	85.4727	89.4605	94.2129	132.6433	138.8113	144.3110	150.8821
114	81.8362	86.3425	90.3511	95.1276	133.7286	139.9207	145.4413	152.0365
115	82.6825	87.2128	91.2422	96.0427	134.8135	141.0297	146.5710	153.1904
116	83.5292	88.0836	92.1338	96.9582	135.8980	142.1382	147.7002	154.3440
117	84.3768	88.9551	93.0258	97.8740	136.9822	143.2462	148.8288	155.4966
118	85.2251	89.8270	93.9183	98.7902	138.0660	144.3536	149.9569	156.6483
119	86.0739	90.6995	94.8113	99.7067	139.1494	145.4607	151.0844	157.7993
120	86.9233	91.5726	95.7046	100.6236	140.2326	146.5673	152.2113	158.9500

df: aantal vrijheidsgraden

**BIJLAGE 5: APPROXIMATE CRITICAL VALUES λ_{i+1}
FOR ROSNER'S GENERALIZED ESD MANY
OUTLIER PROCEDURE**

n	i+1	α			n	i+1	α		
		0.05	0.01	0.005			0.05	0.01	0.005
25	1	2.82	3.14	3.25	31	1	2.92	3.25	3.38
	2	2.80	3.11	3.23		2	2.91	3.24	3.36
	3	2.78	3.09	3.20		3	2.89	3.22	3.34
	4	2.76	3.06	3.17		4	2.88	3.20	3.32
	5	2.73	3.03	3.14		5	2.86	3.18	3.30
	10	2.59	2.85	2.95		10	2.76	3.06	3.17
26	1	2.84	3.16	3.28	32	1	2.94	3.27	3.40
	2	2.82	3.14	3.25		2	2.92	3.25	3.38
	3	2.80	3.11	3.23		3	2.91	3.24	3.36
	4	2.78	3.09	3.20		4	2.89	3.22	3.34
	5	2.76	3.06	3.17		5	2.88	3.20	3.32
	10	2.62	2.89	2.99		10	2.78	3.09	3.20
27	1	2.86	3.18	3.30	33	1	2.95	3.29	3.41
	2	2.84	3.16	3.28		2	2.94	3.27	3.40
	3	2.82	3.14	3.25		3	2.92	3.25	3.38
	4	2.80	3.11	3.23		4	2.91	3.24	3.36
	5	2.78	3.09	3.20		5	2.89	3.22	3.34
	10	2.65	2.93	3.03		10	2.80	3.11	3.23
28	1	2.88	3.20	3.32	34	1	2.97	3.30	3.43
	2	2.86	3.18	3.30		2	2.95	3.29	3.41
	3	2.84	3.16	3.28		3	2.94	3.27	3.40
	4	2.82	3.14	3.25		4	2.92	3.25	3.38
	5	2.80	3.11	3.23		5	2.91	3.24	3.36
	10	2.68	2.97	3.07		10	2.82	3.14	3.25
29	1	2.89	3.22	3.34	35	1	2.98	3.32	3.44
	2	2.88	3.20	3.32		2	2.97	3.30	3.43
	3	2.86	3.18	3.30		3	2.95	3.29	3.41
	4	2.84	3.16	3.28		4	2.94	3.27	3.40
	5	2.82	3.14	3.25		5	2.92	3.25	3.38
	10	2.71	3.00	3.11		10	2.84	3.16	3.28
30	1	2.91	3.24	3.36	36	1	2.99	3.33	3.46
	2	2.89	3.22	3.34		2	2.98	3.32	3.44
	3	2.88	3.20	3.32		3	2.97	3.30	3.43
	4	2.86	3.18	3.30		4	2.95	3.29	3.41
	5	2.84	3.16	3.28		5	2.94	3.27	3.40
	10	2.73	3.03	3.14		10	2.86	3.18	3.30

(continued)

n	i+1	α			n	i+1	α		
		0.05	0.01	0.005			0.05	0.01	0.005
37	1	3.00	3.34	3.47	44	1	3.08	3.43	3.56
	2	2.99	3.33	3.46		2	3.07	3.41	3.55
	3	2.98	3.32	3.44		3	3.06	3.40	3.54
	4	2.97	3.30	3.43		4	3.05	3.39	3.52
	5	2.95	3.29	3.41		5	3.04	3.38	3.51
	10	2.88	3.20	3.32		10	2.98	3.32	3.44
38	1	3.01	3.36	3.49	45	1	3.09	3.44	3.57
	2	3.00	3.34	3.47		2	3.08	3.43	3.56
	3	2.99	3.33	3.46		3	3.07	3.41	3.55
	4	2.98	3.32	3.44		4	3.06	3.40	3.54
	5	2.97	3.30	3.43		5	3.05	3.39	3.52
	10	2.89	3.22	3.34		10	2.99	3.33	3.46
39	1	3.03	3.37	3.50	46	1	3.09	3.45	3.58
	2	3.01	3.36	3.49		2	3.09	3.44	3.57
	3	3.00	3.34	3.47		3	3.08	3.43	3.56
	4	2.99	3.33	3.46		4	3.07	3.41	3.55
	5	2.98	3.32	3.44		5	3.06	3.40	3.54
	10	2.91	3.24	3.36		10	3.00	3.34	3.47
40	1	3.04	3.38	3.51	47	1	3.10	3.46	3.59
	2	3.03	3.37	3.50		2	3.09	3.45	3.58
	3	3.01	3.36	3.49		3	3.09	3.44	3.57
	4	3.00	3.34	3.47		4	3.08	3.43	3.56
	5	2.99	3.33	3.46		5	3.07	3.41	3.55
	10	2.92	3.25	3.38		10	3.01	3.36	3.49
41	1	3.05	3.39	3.52	48	1	3.11	3.46	3.60
	2	3.04	3.38	3.51		2	3.10	3.46	3.59
	3	3.03	3.37	3.50		3	3.09	3.45	3.58
	4	3.01	3.36	3.49		4	3.09	3.44	3.57
	5	3.00	3.34	3.47		5	3.08	3.43	3.56
	10	2.94	3.27	3.40		10	3.03	3.37	3.50
42	1	3.06	3.40	3.54	49	1	3.12	3.47	3.61
	2	3.05	3.39	3.52		2	3.11	3.46	3.60
	3	3.04	3.38	3.51		3	3.10	3.46	3.59
	4	3.03	3.37	3.50		4	3.09	3.45	3.58
	5	3.01	3.36	3.49		5	3.09	3.44	3.57
	10	2.95	3.29	3.41		10	3.04	3.38	3.51
43	1	3.07	3.41	3.55	50	1	3.13	3.48	3.62
	2	3.06	3.40	3.54		2	3.12	3.47	3.61
	3	3.05	3.39	3.52		3	3.11	3.46	3.60
	4	3.04	3.38	3.51		4	3.10	3.46	3.59
	5	3.03	3.37	3.50		5	3.09	3.45	3.58
	10	2.97	3.30	3.43		10	3.05	3.39	3.52

(continued)

1 n	i+1	α			n	i+1	α			
		0.05	0.01	0.005			0.05	0.01	0.005	
60	1	3.20	3.56	3.70	200	1	3.61	3.98	4.13	
	2	3.19	3.55	3.69		2	3.60	3.98	4.13	
	3	3.19	3.55	3.69		3	3.60	3.97	4.12	
	4	3.18	3.54	3.68		4	3.60	3.97	4.12	
	5	3.17	3.53	3.67		5	3.60	3.97	4.12	
	10	3.14	3.49	3.63		10	3.59	3.96	4.11	
70	1	3.26	3.62	3.76	250	1	3.67	4.04	4.19	
	2	3.25	3.62	3.76		5	3.67	4.04	4.19	
	3	3.25	3.61	3.75		10	3.66	4.03	4.18	
	4	3.24	3.60	3.75	300	1	3.72	4.09	4.24	
	5	3.24	3.60	3.74		5	3.72	4.09	4.24	
	10	3.21	3.57	3.71		10	3.71	4.09	4.23	
80	1	3.31	3.67	3.82	350	1	3.77	4.14	4.28	
	2	3.30	3.67	3.81		5	3.76	4.13	4.28	
	3	3.30	3.66	3.81		10	3.76	4.13	4.28	
	4	3.29	3.66	3.80	400	1	3.80	4.17	4.32	
	5	3.29	3.65	3.80		5	3.80	4.17	4.32	
	10	3.26	3.63	3.77		10	3.80	4.16	4.31	
90	1	3.35	3.72	3.86	450	1	3.84	4.20	4.35	
	2	3.34	3.71	3.86		5	3.83	4.20	4.35	
	3	3.34	3.71	3.85		10	3.83	4.20	4.34	
	4	3.34	3.70	3.85	500	1	3.86	4.23	4.38	
	5	3.33	3.70	3.84		5	3.86	4.23	4.37	
	10	3.31	3.68	3.82		10	3.86	4.22	4.37	
100	1	3.38	3.75	3.90	750	1-10	3.95	4.30	4.44	
	2	3.38	3.75	3.90		1000	1-10	4.02	4.37	4.52
	3	3.38	3.75	3.89			2000	1-10	4.20	4.54
	4	3.37	3.74	3.89	3000			1-10	4.29	4.63
	5	3.37	3.74	3.89		4000		1-10	4.36	4.70
	10	3.35	3.72	3.87			5000	1-10	4.41	4.75
150	1	3.52	3.89	4.04						
	2	3.51	3.89	4.04						
	3	3.51	3.89	4.03						
	4	3.51	3.88	4.03						
	5	3.51	3.88	4.03						
	10	3.50	3.87	4.02						

Bron: Rosner (1983)

BIJLAGE 6: LILLIEFORS TEST: CRITICAL VALUES FOR T_2

N	$\alpha = 0.2$	$\alpha = 0.1$	$\alpha = 0.05$	$\alpha = 0.01$
4	0.300	0.352	0.381	0.417
5	0.285	0.315	0.337	0.405
6	0.265	0.294	0.319	0.364
7	0.247	0.276	0.300	0.348
8	0.233	0.261	0.285	0.331
9	0.223	0.249	0.271	0.311
10	0.215	0.239	0.258	0.294
11	0.206	0.230	0.249	0.284
12	0.199	0.223	0.242	0.275
13	0.190	0.214	0.234	0.268
14	0.183	0.207	0.227	0.261
15	0.177	0.201	0.220	0.257
16	0.173	0.195	0.213	0.250
17	0.169	0.189	0.206	0.245
18	0.166	0.184	0.200	0.239
19	0.163	0.179	0.195	0.235
20	0.160	0.174	0.190	0.231
25	0.142	0.158	0.173	0.200
≥ 30	$0.131\sqrt{N}$	$0.144\sqrt{N}$	$0.161\sqrt{N}$	$0.187\sqrt{N}$

**BIJLAGE 7: QUANTILES OF THE SHAPIRO-WILK W
TEST FOR NORMALITY (VALUES OF W
SUCH THAT 100P% OF THE DISTRI-
BUTION OF W IS LESS THAN W_p)**

N	$W_{0.01}$	$W_{0.02}$	$W_{0.05}$	$W_{0.10}$	$W_{0.50}$
3	0.753	0.756	0.767	0.789	0.959
4	0.687	0.707	0.748	0.792	0.935
5	0.686	0.715	0.762	0.806	0.927
6	0.713	0.743	0.788	0.826	0.927
7	0.730	0.760	0.803	0.838	0.928
8	0.749	0.778	0.818	0.851	0.932
9	0.764	0.791	0.829	0.859	0.935
10	0.781	0.806	0.842	0.869	0.938
11	0.792	0.817	0.850	0.876	0.940
12	0.805	0.828	0.859	0.883	0.943
13	0.814	0.837	0.866	0.889	0.945
14	0.825	0.846	0.874	0.895	0.947
15	0.835	0.855	0.881	0.901	0.950
16	0.844	0.863	0.887	0.906	0.952
17	0.851	0.869	0.892	0.910	0.954
18	0.858	0.874	0.897	0.914	0.956
19	0.863	0.879	0.901	0.917	0.957
20	0.868	0.884	0.905	0.920	0.959
21	0.873	0.888	0.908	0.923	0.960
22	0.878	0.892	0.911	0.926	0.961
23	0.881	0.895	0.914	0.928	0.962
24	0.884	0.898	0.916	0.930	0.963
25	0.886	0.901	0.918	0.931	0.964
26	0.891	0.904	0.920	0.933	0.965
27	0.894	0.906	0.923	0.935	0.965
28	0.896	0.908	0.924	0.936	0.966
29	0.898	0.910	0.926	0.937	0.966
30	0.900	0.912	0.927	0.939	0.967
31	0.902	0.914	0.929	0.940	0.967
32	0.904	0.915	0.930	0.941	0.968
33	0.906	0.917	0.931	0.942	0.968
34	0.908	0.919	0.933	0.943	0.969
35	0.910	0.920	0.934	0.944	0.969
36	0.912	0.922	0.935	0.945	0.970
37	0.914	0.924	0.936	0.946	0.970
38	0.916	0.925	0.938	0.947	0.971
39	0.917	0.927	0.939	0.948	0.971

(continued)

N	$W_{0.01}$	$W_{0.02}$	$W_{0.05}$	$W_{0.10}$	$W_{0.50}$
40	0.919	0.928	0.940	0.949	0.972
41	0.920	0.929	0.941	0.950	0.972
42	0.922	0.930	0.942	0.951	0.972
43	0.923	0.932	0.943	0.951	0.973
44	0.924	0.933	0.944	0.952	0.973
45	0.926	0.934	0.945	0.953	0.973
46	0.927	0.935	0.945	0.953	0.974
47	0.928	0.936	0.946	0.954	0.974
48	0.929	0.937	0.947	0.954	0.974
49	0.929	0.937	0.947	0.955	0.974
50	0.930	0.938	0.947	0.955	0.974

Bron: Shapiro en Wilk (1965)

BIJLAGE 8: COEFFICIENTS A_i FOR THE SHAPIRO WILK W TEST FOR NORMALITY

n	2	3	4	5	6	7	8	9	10	
1	0.7071	0.7071	0.6872	0.6646	0.6431	0.6233	0.6052	0.5888	0.5739	
2	-	0.0000	0.1677	0.2413	0.2806	0.3031	0.3164	0.3244	0.3291	
3	-	-	-	0.0000	0.0875	0.1401	0.1743	0.1976	0.2141	
4	-	-	-	-	-	0.0000	0.0561	0.0947	0.1224	
5	-	-	-	-	-	-	-	0.0000	0.0399	
n	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
1	0.5601	0.5475	0.5359	0.5251	0.5150	0.5056	0.4968	0.4886	0.4808	0.4734
2	0.3315	0.3325	0.3325	0.3318	0.3306	0.3290	0.3273	0.3253	0.3232	0.3211
3	0.2260	0.2347	0.2412	0.2460	0.2495	0.2521	0.2540	0.2553	0.2561	0.2565
4	0.1429	0.1586	0.1707	0.1802	0.1878	0.1939	0.1988	0.2027	0.2059	0.2085
5	0.0695	0.0922	0.1099	0.1240	0.1353	0.1447	0.1524	0.1587	0.1641	0.1686
6	0.0000	0.0303	0.0539	0.0727	0.0880	0.1005	0.1109	0.1197	0.1271	0.1334
7	-	-	0.0000	0.0240	0.0433	0.0593	0.0725	0.0837	0.0932	0.1013
8	-	-	-	-	0.0000	0.0196	0.0359	0.0496	0.0612	0.0711
9	-	-	-	-	-	-	0.0000	0.0163	0.0303	0.0422
10	-	-	-	-	-	-	-	-	0.0000	0.0140
n	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
1	0.4643	0.4590	0.4542	0.4493	0.4450	0.4407	0.4366	0.4328	0.4291	0.4254
2	0.3185	0.3156	0.3126	0.3098	0.3069	0.3043	0.3018	0.2992	0.2968	0.2944
3	0.2578	0.2571	0.2563	0.2554	0.2543	0.2533	0.2522	0.2510	0.2499	0.2487
4	0.2119	0.2131	0.2139	0.2145	0.2148	0.2151	0.2152	0.2151	0.2150	0.2148
5	0.1736	0.1764	0.1787	0.1807	0.1822	0.1836	0.1848	0.1857	0.1864	0.1870
6	0.1399	0.1443	0.1480	0.1512	0.1539	0.1563	0.1584	0.1601	0.1616	0.1630
7	0.1092	0.1150	0.1201	0.1245	0.1283	0.1316	0.1346	0.1372	0.1395	0.1415
8	0.0804	0.0878	0.0941	0.0997	0.1046	0.1089	0.1128	0.1162	0.1192	0.1219
9	0.0530	0.0618	0.0696	0.0764	0.0823	0.0876	0.0923	0.0965	0.1002	0.1036
10	0.0263	0.0368	0.0459	0.0539	0.0610	0.0672	0.0728	0.0778	0.0822	0.0862
11	0.0000	0.0122	0.0228	0.0321	0.0403	0.0476	0.0540	0.0598	0.0650	0.0697
12	-	-	0.0000	0.0107	0.0200	0.0284	0.0358	0.0424	0.0483	0.0537
13	-	-	-	-	0.0000	0.0094	0.0178	0.0253	0.0320	0.0381
14	-	-	-	-	-	-	0.0000	0.0084	0.0159	0.0227
15	-	-	-	-	-	-	-	-	0.0000	0.0076

(continued)

f _n	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
1	0.4220	0.4188	0.4156	0.4127	0.4096	0.4068	0.4040	0.4015	0.3989	0.3964
2	0.2921	0.2898	0.2876	0.2854	0.2834	0.2813	0.2794	0.2774	0.2755	0.2737
3	0.2475	0.2462	0.2451	0.2439	0.2427	0.2415	0.2403	0.2391	0.2380	0.2368
4	0.2145	0.2141	0.2137	0.2132	0.2127	0.2121	0.2116	0.2110	0.2104	0.2098
5	0.1874	0.1878	0.1880	0.1882	0.1883	0.1883	0.1883	0.1881	0.1880	0.1878
6	0.1641	0.1651	0.1660	0.1667	0.1673	0.1678	0.1683	0.1686	0.1689	0.1691
7	0.1433	0.1449	0.1463	0.1475	0.1487	0.1496	0.1505	0.1513	0.1520	0.1526
8	0.1243	0.1265	0.1284	0.1301	0.1317	0.1331	0.1344	0.1356	0.1366	0.1376
9	0.1066	0.1093	0.1118	0.1140	0.1160	0.1179	0.1196	0.1211	0.1225	0.1237
10	0.0899	0.0931	0.0961	0.0988	0.1013	0.1036	0.1056	0.1075	0.1092	0.1108
11	0.0739	0.0777	0.0812	0.0844	0.0873	0.0900	0.0924	0.0947	0.0967	0.0986
12	0.0585	0.0629	0.0669	0.0706	0.0739	0.0770	0.0798	0.0824	0.0848	0.0870
13	0.0435	0.0485	0.0530	0.0572	0.0610	0.0645	0.0677	0.0706	0.0733	0.0759
14	0.0289	0.0344	0.0395	0.0441	0.0484	0.0523	0.0559	0.0592	0.0622	0.0651
15	0.0144	0.0206	0.0262	0.0314	0.0361	0.0404	0.0444	0.0481	0.0515	0.0546
16	0.0000	0.0068	0.0131	0.0187	0.0239	0.0287	0.0331	0.0372	0.0409	0.0444
17	-	-	0.0000	0.0062	0.0119	0.0172	0.0220	0.0264	0.0305	0.0343
18	-	-	-	-	0.0000	0.0057	0.0110	0.0158	0.0203	0.0244
19	-	-	-	-	-	-	0.0000	0.0053	0.0101	0.0146
20	-	-	-	-	-	-	-	-	0.0000	0.0049

f _n	41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
1	0.3940	0.3917	0.3894	0.3872	0.3850	0.3830	0.3808	0.3789	0.3770	0.3751
2	0.2719	0.2701	0.2684	0.2667	0.2651	0.2635	0.2620	0.2604	0.2589	0.2574
3	0.2357	0.2345	0.2334	0.2323	0.2313	0.2302	0.2291	0.2281	0.2271	0.2260
4	0.2091	0.2085	0.2078	0.2072	0.2065	0.2058	0.2052	0.2045	0.2038	0.2032
5	0.1876	0.1874	0.1871	0.1868	0.1865	0.1862	0.1859	0.1855	0.1851	0.1847
6	0.1693	0.1694	0.1695	0.1695	0.1695	0.1695	0.1695	0.1693	0.1692	0.1691
7	0.1531	0.1535	0.1539	0.1542	0.1545	0.1548	0.1550	0.1551	0.1553	0.1554
8	0.1384	0.1392	0.1398	0.1405	0.1410	0.1415	0.1420	0.1423	0.1427	0.1430
9	0.1249	0.1259	0.1269	0.1278	0.1286	0.1293	0.1300	0.1306	0.1312	0.1317
10	0.1123	0.1136	0.1149	0.1160	0.1170	0.1180	0.1189	0.1197	0.1205	0.1212
11	0.1004	0.1020	0.1035	0.1049	0.1062	0.1073	0.1085	0.1095	0.1105	0.1113
12	0.0891	0.0909	0.0927	0.0943	0.0959	0.0972	0.0986	0.0998	0.1010	0.1020
13	0.0782	0.0804	0.0824	0.0842	0.0860	0.0876	0.0892	0.0906	0.0919	0.0932
14	0.0677	0.0701	0.0724	0.0745	0.0765	0.0783	0.0801	0.0817	0.0832	0.0846
15	0.0575	0.0602	0.0628	0.0651	0.0673	0.0694	0.0713	0.0731	0.0748	0.0764
16	0.0476	0.0506	0.0534	0.0560	0.0584	0.0607	0.0628	0.0648	0.0667	0.0685
17	0.0379	0.0411	0.0442	0.0471	0.0497	0.0522	0.0546	0.0568	0.0588	0.0608
18	0.0283	0.0318	0.0352	0.0383	0.0412	0.0439	0.0465	0.0489	0.0511	0.0532
19	0.0188	0.0227	0.0263	0.0296	0.0328	0.0357	0.0385	0.0411	0.0436	0.0459
20	0.0094	0.0136	0.0175	0.0211	0.0245	0.0277	0.0307	0.0335	0.0361	0.0386
21	0.0000	0.0045	0.0087	0.0126	0.0163	0.0197	0.0229	0.0259	0.0288	0.0314
22	-	-	0.0000	0.0042	0.0081	0.0118	0.0153	0.0185	0.0215	0.0244
23	-	-	-	-	0.0000	0.0039	0.0076	0.0111	0.0143	0.0174
24	-	-	-	-	-	-	0.0000	0.0037	0.0071	0.0104
25	-	-	-	-	-	-	-	-	0.0000	0.0035

Bron: Shapiro en Wilk (1965)

BIJLAGE 9: SKEW: ONE SIDED CRITICAL VALUES

(one-tailed percentage points of the distribution of $\sqrt{b_1} = g_1 = \frac{m_3}{m_2^{3/2}}$)

Size of Sample N	Percentage Points		Standard Deviation	Size of Sample N	Percentage Points		Standard Deviation
	5%	1%			5%	1%	
25	0.711	1.061	0.4354	100	0.389	0.567	0.2377
30	.661	0.982	.4052	125	.350	.508	.2139
35	.621	0.921	.3804	150	.321	.464	.1961
40	.587	0.869	.3596	175	.298	.430	.1820
45	.558	0.825	.3418	200	.280	.403	.1706
50	.533	0.787	.3264	250	.251	.360	.1531
60	.492	0.723	.3009	300	.230	.329	.1400
70	.459	0.673	.2806	350	.213	.305	.1298
80	.432	0.631	.2638	400	.200	.285	.1216
90	.409	0.596	.2498	450	.188	.269	.1147
100	0.389	0.567	0.2377	500	0.179	0.255	0.1089

Bron: Tables for Statisticians and Biometricians, vol.1, Table 34B

BIJLAGE 10: KURTOSIS: TWO SIDED CRITICAL VALUES

(percentage points of the distribution of $b_2 = \frac{m_4}{m_2^2}$)

Size of Sample N	Percentage Points				Size of Sample N	Percentage Points			
	Upper		Lower			Upper		Lower	
	1%	5%	5%	1%		1%	5%	5%	1%
50	4.88	3.99	2.15	1.95	600	3.54	3.34	2.70	2.60
75	4.59	3.87	2.27	2.08	650	3.52	3.33	2.71	2.61
100	4.39	3.77	2.35	2.18	700	3.50	3.31	2.72	2.62
125	4.24	3.71	2.40	2.24	750	3.48	3.30	2.73	2.64
150	4.13	3.65	2.45	2.29	800	3.46	3.29	2.74	2.65
					850	3.45	3.28	2.74	2.66
200	3.98	3.57	2.51	2.37	900	3.43	3.28	2.75	2.66
250	3.87	3.52	2.55	2.42	950	3.42	3.27	2.76	2.67
300	3.79	3.47	2.59	2.46	1000	3.41	3.26	2.76	2.68
350	3.72	3.44	2.62	2.50					
400	3.67	3.41	2.64	2.52	1200	3.37	3.24	2.78	2.71
450	3.63	3.39	2.66	2.55	1400	3.34	3.22	2.80	2.72
500	3.60	3.37	2.67	2.57	1600	3.32	3.21	2.81	2.74
550	3.57	3.35	2.69	2.58	1800	3.30	3.20	2.82	2.76
600	3.54	3.34	2.70	2.60	2000	3.28	3.18	2.83	2.77

Bron: Tables for Statisticians and Biometricians, Table 34 C

BIJLAGE 11: OVERSCHRIJDINGSKANSEN KENDALL S-TOETSINGSGROOTHEID

N	α			
	0.1	0.05	0.025	0.01
4	6	6	-	-
5	8	8	10	10
6	9	11	13	13
7	11	13	15	17
8	12	14	16	20
9	14	18	20	24
10	17	21	23	27
11	19	23	27	31
12	20	26	30	34
13	24	28	34	40
14	25	31	37	43
15	29	35	41	47
16	30	38	46	52
17	34	42	50	58
18	35	45	53	63
19	39	49	57	67
20	42	52	62	72
21	44	56	66	78
22	47	61	71	83
23	51	65	75	89
24	51	68	80	94
25	58	72	86	100
26	61	77	91	105
27	63	81	95	111
28	68	86	100	118
29	70	90	106	124
30	73	95	111	131
31	77	99	117	137
32	82	104	122	144
33	84	108	128	150
34	89	113	133	157
35	93	117	139	157
36	96	122	144	170
37	100	128	150	178
38	105	133	157	185
39	109	137	163	191
40	112	142	170	200

Bron: Kaarsemaker en Van Wijngaarden (1953)

**BIJLAGE 12: OVERSCHRIJDINGSKANSEN VOOR DE
RANGCORRELATIECOËFFICIËNT VAN
SPEARMAN VOOR $N \leq 30$**

N	p					
	0.9	0.95	0.975	0.99	0.995	0.999
4	0.8	0.8				
5	0.7	0.8	0.9	0.9		
6	0.6	0.7714	0.8286	0.8857	0.9429	
7	0.5357	0.6786	0.745	0.8571	0.8929	0.9643
8	0.5	0.619	0.7143	0.8095	0.8571	0.9286
9	0.4667	0.5833	0.6833	0.7667	0.8167	0.9
10	0.4424	0.5515	0.6364	0.733	0.7818	0.8667
11	0.4182	0.5273	0.6091	0.7	0.7455	0.8364
12	0.3986	0.4965	0.5804	0.6713	0.7273	0.8182
13	0.3791	0.478	0.5549	0.6429	0.6978	0.7912
14	0.3626	0.4593	0.5341	0.622	0.6747	0.767
15	0.35	0.4429	0.5179	0.6	0.6536	0.7464
16	0.3382	0.4265	0.5	0.5824	0.6324	0.7265
17	0.326	0.4118	0.4853	0.5637	0.6152	0.7083
18	0.3148	0.3994	0.4716	0.548	0.5975	0.6904
19	0.307	0.3895	0.4579	0.5333	0.5825	0.6737
20	0.2977	0.3789	0.4451	0.5203	0.5684	0.6586
21	0.2909	0.3688	0.4351	0.5078	0.5545	0.6455
22	0.2829	0.3597	0.4241	0.4963	0.5426	0.6318
23	0.2767	0.3518	0.415	0.4852	0.5306	0.6186
24	0.2704	0.3435	0.4061	0.4748	0.52	0.607
25	0.2646	0.3362	0.3977	0.4654	0.51	0.5962
26	0.2588	0.32299	0.3894	0.4564	0.5002	0.5856
27	0.254	0.3236	0.3822	0.4481	0.4915	0.5757
28	0.249	0.3175	0.3749	0.4401	0.4828	0.566
29	0.2443	0.3113	0.3685	0.432	0.4744	0.5567
30	0.24	0.3059	0.362	0.4251	0.4665	0.5479

BIJLAGE 13: QUANTILES OF THE WALD WOLFOWITZ TOTAL NUMBER OF RUNS STATISTIC

N1	N2	0.005	0.01	0.025	0.05	0.1	0.9	0.95	0.975	0.9	0.995
2	5					3					
	8				3	3					
	11				3	3					
	14			3	3	3					
	17			3	3	3					
5	20		3	3	3	4					
	5		3	3	4	4	8	8	9	9	
	8	3	3	4	4	5	9	10	10		
	11	4	4	5	5	6	10				
	14	4	4	5	6	6					
8	17	4	5	5	6	7					
	20	5	5	6	6	7					
	8	4	5	5	6	6	12	12	13	13	14
	11	5	6	6	7	8	13	14	14	15	15
	14	6		7	8	8	14	15	15	16	16
11	17	6	6	8	8	9	15	15	16		
	20	7	7	8	9	10	15	16	16		
	11	6	7	8	8	9	15	16	16	17	18
	14	7	8	9	9	10	16	17	18	19	19
	17	8	9	10	10	11	17	18	19	20	21
14	20	9	9	10	11	12	18	19	20	21	21
	14	8	9	10	11	12	18	19	20	21	22
	17	9	10	11	12	13	20	21	22	23	23
	20	10	11	12	13	14	21	22	23	24	24
	17	11	11	12	13	14	22	23	24	25	25
17	20	12	12	14	14	16	23	24	25	26	27
	20	13	14	15	16	17	25	26	27	28	29

If N1 and N2 are larger then 20 Z is approximately normal distributed. Critical values can be obtained from the one-sided normal distribution.

Reject the hypothesis if either $T < w(\alpha/2)$ or $t > w(1-\alpha/2)$. For values of N which are not listed take the closest value.

